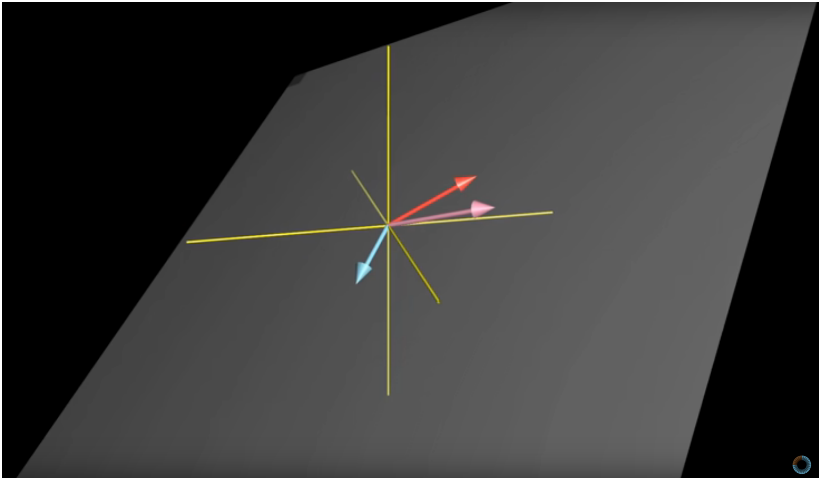
Familles de vecteurs

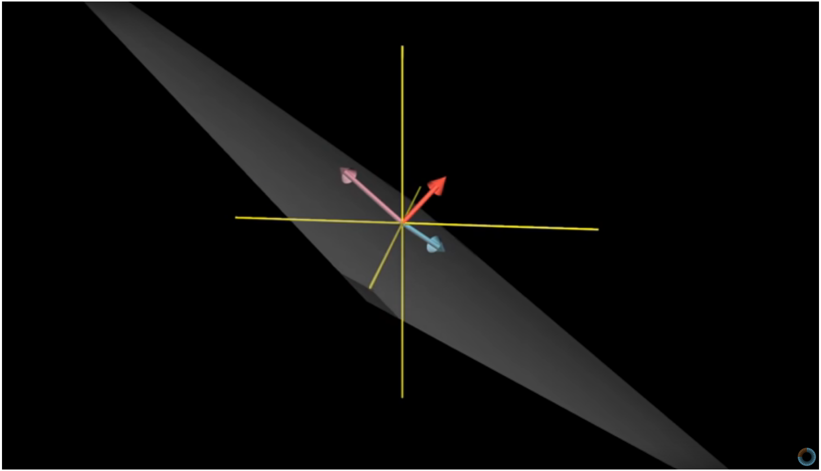
Olivier Nicole

22 mars 2021

Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une *combinaison linéaire* de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est libre : on ne peut pas construire $\vec{\imath}$ à partir de $\vec{\jmath}$, et inversement.
En revanche, $(1, 1)$ et $(-2, -2)$ sont *liés*.





Définition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour toute famille de scalaire $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Proposition 1

Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E.

Exercice 1

Montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\cdot})$.

Fait au cours précédent.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta_k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est libre. Ainsi par exemple $((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2

Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Proposition 3

Une famille libre reste libre si on change l'ordre de ses éléments. Inversement, si elle est liée, elle reste liée.

Proposition 4

Multiplier un élément d'une famille par un scalaire non nul ne change pas son caractère libre ou lié.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Proposition 6

Soient m et n deux entiers positifs.. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. Si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est échelonnée, et que tous ses membres sont non nuls, alors elle est libre. Une famille échelonnée, c'est une famille où pour chaque vecteur, l'indice de la dernière composante non nulle est différent.

Si on écrit les vecteurs d'une famille échelonnée les uns au-dessus des autres dans un certain ordre, on obtient une sorte d'escalier :

$$\begin{array}{cccc} (1, & 0, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 1, & 0) \end{array}$$

est échelonnée (et donc libre).

$$\begin{array}{llll}(1, & -5, & 0, & 0) \\ (-1, & 2, & 19/7, & 0) \\ (0, & 8, & 7, & -1)\end{array}$$

l'est aussi. En revanche,

$$\begin{array}{lll}(-1, & 5, & 0) \\ (1, & 12, & 3) \\ (1/3, & 8, & 7)\end{array}$$

n'est pas échelonnée.

Le pivot de Gauss

Trois opérations qui **transforment** une famille de vecteurs mais conservent son caractère **libre ou lié**.

$$
\begin{aligned}
&L_i \leftrightarrow L_j \\
&L_i \leftarrow \lambda L_i \qquad\qquad (\lambda \neq 0) \\
&L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j
\end{aligned}
$$

Exemple 2

Montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(2,3,0))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Exercice 2

Montrer que la famille $((1,0,1),(0,2,-1),(2,-2,3))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\cdot})$.

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in J}$, tels que :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Proposition 7

Si, en mettant les vecteurs d'une famille les uns au-dessus des autres, il apparaît une colonne nulle, alors la famille n'est pas génératrice.

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.

Proposition 8

Si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, on obtient une famille génératrice.

Proposition 9

Changer l'ordre des vecteurs d'une famille ne change pas le caractère générateur ou non générateur.

Proposition 10

Multiplier un élément d'une famille par un scalaire non nul ne change pas le caractère générateur ou non générateur.

Proposition 11

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I, tel que $(u_i)_{i\in I}$ soit une base de E.
Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et une unique famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$ (on dit que c'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 12

Les opérations du pivot de Gauss, appliquées à une base, résultent en une base.

Théorème 2 – Théorème « de la base incomplète »

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E, telle que $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ soit une famille libre (avec $k \leq n$).
Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq p \leq n$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E.

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.

Définition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E.

Proposition 13

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

Proposition 14

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille libre de n élément est une base.

Proposition 15

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille génératrice de n élément est une base.

Exercice 3

Montrer que

$$\begin{array}{rrr}(1, & 0, & 1)\\(0, & 2, & -1)\\(2, & 0, & -1)\end{array}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ (muni des opérations vectorielles usuelles).