Familles de vecteurs

Olivier Nicole
adapté d'un travail original de Marc Chevalier

2020-2021

1 Familles libres

Définition 1

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour toute famille de scalaire $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Définition 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une famille d'éléments de E. On dit que f est liée si et seulement si elle n'est pas libre.

Remarque 1

On a de temps en temps besoin d'étendre cette définition à des familles infinies. La définition qui suit marche pour des familles finies ou infinies mais est moins claire que la première. En somme, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies le sont.
Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour tout ensemble fini $J \subseteq I$ et toute famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in J}$, on a :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E \implies \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Proposition 1

Si $(E,+,\bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E.

Exercice 1

Montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\cdot})$.

Exemple 1

Montrer que la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(2,3,0))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\cdot})$.

Exemple 2

Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n,\dot{+},\dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta_k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est libre. Ainsi par exemple $((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I}\in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, la famille $(u_j)_{j\in J}$ est libre.

Proposition 3

Une famille libre reste libre si on change l'ordre de ses éléments. Inversement, si elle est liée, elle reste liée.
Plus formellement (mais moins clairement) : Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I}\in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in I}\in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ v_i := u_{\sigma(i)}. \right.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Proposition 4

Multiplier un élément d'une famille par un scalaire non nul ne change pas son caractère libre ou lié.
Plus formellement (mais moins clairement) : Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Proposition 6

Soient m et n deux entiers positifs.. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. Si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est échelonnée, et que tous ses membres sont non nuls, alors elle est libre. Une famille échelonnée, c'est une famille où pour chaque vecteur, l'indice de la dernière composante non nulle est différent. Si on écrit les vecteurs d'une famille échelonnée les uns au-dessus des autres dans un certain ordre, on obtient une sorte d'escalier :

$$\begin{array}{cccc} (1, & 0, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 0, & 0) \\ (1, & 1, & 1, & 0) \end{array}$$

est échelonnée (et donc libre).

$$\begin{array}{llll}
(1, & -5, & 0, & 0) \\
(-1, & 2, & 19/7, & 0) \\
(0, & 8, & 7, & -1)
\end{array}$$

l'est aussi. En revanche,

$$\begin{array}{lll}
(-1, & 5, & 0) \\
(1, & 12, & 3) \\
(1/3, & 8, & 7)
\end{array}$$

n'est pas échelonnée : ses deuxième et troisième vecteurs ont leur dernière composante non nulle au même indice, à savoir 3. Il faudra donc plus de travail pour déterminer si elle est libre ou non.

L'agorithme 1 permet de déterminer automatique si une famille de $\mathbb{K}^n$ est libre. Toutefois, je vous déconseille de l'apprendre par cœur : par essence, ce que fait cet algorithme, c'est appliquer des opérations du pivot de Gauss sur la famille pour obtenir une famille échelonnée. C'est la méthode qu'on a vue en cours.

Algorithme 1 : Élimination de Gauss-Jordan

Data : Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Result : L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est libre, ou liée.

On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = m$ alors la famille est libre.
2. si $p < m$ et si pour tout q entre 1 et n, $u_{p+1,q} = 0$, alors la famille est liée.
3. sinon, prendre q le plus petit entier tel que $u_{p+1,q} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_{p+1} par l'inverse de $u_{p+1,q}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{p'}$ pour $p' \neq p$ le vecteur u_{p+1} multiplié par $u_{p',q}$.
6. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
7. Retourner à l'étape 1.

---

2 Familles génératrices

Définition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j\in J}$, tels que :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Proposition 7

Si, en mettant les vecteurs d'une famille les uns au-dessus des autres, il apparaît une colonne nulle, alors la famille n'est pas génératrice.
Plus formellement (mais moins clairement) : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}^n$ telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0. Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1\leq k\leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k-ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.

Proposition 8

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit J un sous ensemble de I. Alors, si la famille $(u_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.

Proposition 9

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i := u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Proposition 10

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} := \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i := u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

Proposition 11

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice.

3 Bases et dimensions

Définition 4

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 1

Soit $(E,+,\bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I, tel que $(u_i)_{i\in I}$ soit une base de E. Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et

Algorithme 2 : Comment trouver si une famille est génératrice ?

Soient m et n deux entiers positifs dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq m}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq m}$ est génératrice, ou non.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est génératrice.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq m$, on a : $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas génératrice.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

une unique famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$ (on dit que c'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Proposition 12

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit

$(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Proposition 13

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Proposition 14

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base.

Théorème 2

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'élément de E, tel que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j\in J}$ soit une famille génératrice de E. Alors il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et la famille $(u_k)_{k\in K}$ est une base de E.

Théorème 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.

Définition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E.

Proposition 15

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille libre de n élément est une base.

Proposition 16

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille génératrice de n élément est une base.

Proposition 17

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

Algorithme 3 : Comment trouver si une famille est une base ?

Soient n un entier positif dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, ou liée.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est une base.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq n$, on ait $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas une base.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.