Espaces vectoriels

Olivier Nicole
adapté d'un travail original de Marc Chevalier

2020–2021

On appelle algèbre le fait de manipuler des éléments mathématiques sans connaître exactement leur valeur, mais en connaissant seulement certaines de leur propriétés. Par exemple, on pourrait prendre un réel, l'appeler x, et supposer qu'il vérifie :

$$2x - 3 = 0$$

et se demander ce qu'on peut en déduire d'autre sur x. En l'occurrence, on sait dès le collège qu'un tel x existe, qu'il est unique, et on sait facilement trouver sa valeur. On peut également s'intéresser aux réels z qui vérifient :

$$z^2 - z - 1 = 0$$

Déterminer précisement quels sont ces réels demande déjà un petit peu plus de travail. On peut remarquer contrairement à x, z ne peut pas s'exprimer comme une fraction d'entiers.

L'algèbre linéaire s'intéresse aux objets mathématiques liés entre eux par des transformations linéaires. La première équation ci-dessus est une relation linéaire, pas la seconde. Une transformation (ou fonction, ou application) linéaire est une fonction qui se comporte de façon particulière vis-à-vis de l'addition et de la multiplication :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Et ce, pour des définitions très générales de « addition » et « multiplication », et pour des objets qui ne sont pas forcément de simples réels.

À quoi sert l'algèbre linéaire ? De même que l'algèbre en général, elle a énormément d'applications en calcul. Énormément de choses en physique ou en biologie peuvent être décrites par des équations linéaires, et l'algèbre linéaire met à disposition des résultats puissants pour étudier leur évolution et faire des calculs. Quelques applications possibles :

— l'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre arbitraire ;
— la reconnaissance d'images ;
— l'étude des équations différentielles linéaires. . .

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps dont les lois sont notées $+$ et $\cdot$. Cependant, on s'intéressera aux cas où $\mathbb{K}$ est soit l'ensemble $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 1

Soit A un ensemble. Une loi interne sur A est une fonction de $A \times A$ dans A.

Notation 1

Si $\otimes$ est une loi interne sur l'ensemble A, alors, pour tous éléments x, y de l'ensemble A, l'élément $\otimes(x, y)$ est habituellement noté $x \otimes y$.

Définition 2

Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite associative si et seulement si, pour tous éléments x, y, z de l'ensemble A, on a : $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

Définition 3

Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite commutative si et seulement si, pour tous éléments x, y de l'ensemble A, on a : $x \otimes y = y \otimes x$.

Définition 4

Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$.

Un élément $\varepsilon \in A$ est un élément neutre pour la loi $\otimes$ si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $x \otimes \varepsilon = x$ et $\varepsilon \otimes x = x$.

Définition 5

Soit $\otimes$ une loi interne sur un ensemble A qui admet un élément neutre ε et soit x, y deux éléments de A. On dit que :

1. y est un inverse à gauche de x si et seulement si $y \otimes x = \varepsilon$.
2. y est un inverse à droite de x si et seulement si $x \otimes y = \varepsilon$.
3. y est un inverse de x si et seulement si y est un inverse à droite de x, et un inverse à gauche de x.

Un élément $x \in A$ est dit inversible si et seulement si il admet un inverse.

Exercice 1

Trouver des exemples de lois de composition interne sur :
— $\mathbb{N}$
— $\mathbb{Z}$
— $\mathbb{Q}$
— $\mathbb{R}^2$

Cette loi a-t-elle un élément neutre ? Est-ce que tous les éléments de l'ensemble sont inversibles ?

Proposition 1

Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Soit x un élément de A. Si l'élément x est inversible, alors il existe un unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$.

Exercice 2

Montrer cette proposition.

Proposition 2

Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux élément inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :

$$(x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}.$$

2 Groupes

Définition 6

Un groupe est une paire $(G, \times)$ telle que G soit un ensemble, et $\times$ soit une loi interne associative sur G qui admet un élément neutre, et telle que tout élément de x soit inversible.

Définition 7

Un groupe $(G, +)$ est dit abélien (ou commutatif), si la loi $+$ est commutative.

3 Définition d'un espace vectoriel

Définition 8

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :

1. $(E, +)$ soit un groupe abélien, dont on note l'élément neutre 0_E ;
2. $\bullet$ soit une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;
3. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$ on ait :
   (a) $(\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$;
   (b) $\lambda \bullet (u + v) = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v)$;
   (c) $\lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet u$;
   (d) $1 \bullet u = u$.

Proposition 3

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $0 \bullet u = 0_E$.

Proposition 4

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre 0_E et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

Proposition 5

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $(-1) \bullet u = -u$.

Proposition 6

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un élément de E, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Si $\lambda \bullet u = 0_E$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

4 Sous-espaces

Définition 9

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble non vide $F \subseteq E$, tel que :

1. pour tout $u, v \in F$, $(u + v) \in F$;

2. pour tout $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \bullet u) \in F$.

Exercice 3

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, \times, \cdot)$.

Proposition 7

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F contient l'élément neutre 0_E de la loi $+$ définie sur E.

Proposition 8

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. On note $+_{|F}$ la loi interne qui associe à une paire (u, v) d'éléments dans F, l'élément $u + v$, et $\cdot_{|F}$ la loi externe qui associe à un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et à un élément $u \in F$, l'élément $\lambda \bullet u$. Alors $(F, +_{|F}, \cdot_{|F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre 0_E.