Éléments propres et réduction des endomorphismes

Marc Chevalier
DI ENS

2019-2020

Table des matières

1 Éléments propres **2**
1.1 Définitions 2

2 Réduction des endomorphismes **7**
2.1 Matrices diagonales 7
2.2 Matrices diagonalisables 10

3 Applications **11**
3.1 Application à la récurrence linéaire d'ordre n 11
3.1.1 Cas de la suite de Fibonacci 11
3.2 Application aux équations différentielles homogènes d'ordre 2 linéaires à coefficients constants 13
3.2.1 Les ordres supérieurs 16

La réduction des endomorphismes est un domaine de l'algèbre linéaire dont le but est de trouver des expressions les plus simples possibles des morphismes et des matrices grâce à des changements de base. Cela sert différents objectifs. Une matrice sous une forme plus simple se prête beaucoup mieux au calcul, ainsi qu'à son interprétation On peut ainsi s'en servir pour mieux comprendre un morphisme, ou ce qu'il représente. C'est également une étape utile dans les applications qui doivent faire beaucoup d'opérations numériques sur des matrices. C'est par exemple utile en traitement du signal ou des données (statistiques). On peut citer l'analyse en composantes principales ou l'étude des systèmes dynamiques.

Comme on étudie les endomorphismes, on ne considérera que des matrices carrées.

Une première approche de la réduction des endomorphismes, la seule qu'on verra dans ce cours, consiste à trouver des directions dans lesquelles le morphisme se comporte comme une homothétie.

1 Éléments propres

On prend un corps $\mathbb{K}$ et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Définition 1 – Valeur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur x non nul tel que
$$u(x) = \lambda \cdot x$$

Il est important de préciser « non nul » car le vecteur nul vérifie toujours cette égalité. En effet $u(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

On peut également formuler l'égalité ci-dessus sous la forme

$$u(x) - \lambda \cdot x = 0$$

c'est à dire
$$(u - \lambda Id_E)(x) = 0$$

En d'autres termes, λ est une valeur propre de u si et seulement si l'application $u - \lambda \cdot Id$ a un noyau non réduit à $\{0\}$, ie. n'est pas injective.

Exemple 1

Pour tout vecteur x, on a $Id(x) = x$. 1 est donc une valeur propre de l'identité. En effet $Id - 1 \cdot Id = 0$ n'est pas injectif.

Exemple 2

On se place dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on considère le morphisme D de dérivation. On a $D(x \mapsto \exp(x)) = x \mapsto \exp(x)$. 1 est donc une valeur propre de D. Mais on a aussi $D(x \mapsto \exp(kx)) = x \mapsto k \exp(kx)$, pour tout k. Donc tout réel est valeur propre de D.

On peut reformuler en matrices.

Définition 2 – Valeur propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe une matrice colonne $x \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ non nulle tel que

$$Ax = \lambda x$$

Définition 3 – Spectre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de u et on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle spectre de A et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition 4 – Vecteur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de u s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x$$

On dit que x est un vecteur propre associé à λ.

On impose que x soit non nul car pour 0, on a $u(0) = 0 = \lambda 0$, pour tout λ, donc ça ne sert à rien.

En poursuivant la remarque précédente, on peut simplement dire qu'un vecteur propre de u associée à la valeur propre λ est un élément de $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot Id_E)$.

Exemple 3

Pour tout vecteur x, on a $Id(x) = x$. Donc tout vecteur est vecteur propre associée à la valeur propre 1.

Exemple 4

On se place dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et on considère le morphisme D de dérivation. On a $D(x \mapsto \exp(x)) = x \mapsto \exp(x)$. $x \mapsto \exp(x)$ est donc un vecteur propre de D associé à la valeur propre 1. Mais on a aussi $D(x \mapsto \exp(kx)) = x \mapsto k\exp(kx)$, pour tout k. Donc $x \mapsto \exp(kx)$ est un vecteur propre de D associée à k.

Notons qu'une valeur propre peut être nulle. Un vecteur propre x associé serait tel que $u(x) = 0$. C'est à dire $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$.

Définition 5 – Vecteur propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $x\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$Ax = \lambda x$$

On dit que x est un vecteur propre associé à λ.

Définition 6 – Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$. On appelle sous-espace propre de u associé à λ (qu'on notera E_λ) l'ensemble formé de l'union du vecteur nul et des vecteurs propres pour la valeur propre λ.

Encore une fois, on peut définir le sous-espace propre associé à λ comme $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot Id)$.

Définition 7 – Sous-espace propre d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$. On appelle sous-espace propre de A associé à λ (qu'on notera E_λ) l'ensemble formé de l'union du vecteur nul et des vecteurs propres pour la valeur propre λ.

Théorème 1

Les sous-espaces propres sont des sous-espaces vectoriels.

Démonstration. En effet, un sous-espace propre est le noyau d'une application linéaire, donc un sous-espace vectoriel. □

Attardons nous un instant pour réfléchir. Un vecteur propre x de valeur propre λ est un vecteur qui n'est que allongé d'un facteur λ quand on applique le morphisme. Dans la direction de ce vecteur, le morphisme se comporte comme l'homothétie de rapport λ.

Exemple 5

Prenons la symétrie orthogonale s par rapport à la droite $x = y$ dans $\mathbb{R}^2$.
Le vecteur $x = (1, 1)$ est stable par cette symétrie (puisqu'il est sur l'axe de symétrie). On a $s(1, 1) = 1 \cdot (1, 1) = x$.
D'autre part, le vecteur $y = (-1, 1)$ est orthogonal à l'axe de symétrie. Donc $s(-1, 1) = (1, -1) = -y$.
Donc pour tout vecteur $z = ax + by$, $s(z) = s(ax + by) = s(ax) + s(by) = as(x) + bs(y) = ax - by$. Ce qui est visiblement très simple. Regardons en

matrices.
Comme $s(x) = 1 \cdot x + 0 \cdot y$ et $s(y) = 0 \cdot x - 1 \cdot y$, la matrice de s dans $(x, y))$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui, convenons-le, est simple. Comparons à ce qui se serait passé dans la base canonique (e_1, e_2). On a $s(e_1) = e_2$ et $s(e_2) = e_1$. Donc la matrice aurait été

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On serait tenté de dire que c'est pas tellement pire. En fait, si ! Ici, l'image de e_1 a une composante (et en fait que celle-là) selon e_2. Pareil dans l'autre sens. Cette expression mélange les différents axes. Alors que dans la base (x, y). La composante selon x a une image uniquement dans le sens de x. De même pour y. On peut donc calculer indépendamment les différentes composantes. Sous forme de matrice, ça se traduit par des coefficients uniquement sur la diagonale : chaque vecteur de la base a une image proportionnelle à lui-même.

Désormais, on ne parlera en matrice par défaut, le parallèle étant flagrant.

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est valeur propre de A si et seulement si A est racine du polynôme caractéristique de A.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

($\Rightarrow$) On suppose que λ est valeur propre de A. Donc il existe x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Par conséquent, $(A - \lambda I_n)x = 0$, avec $x \neq 0$. Donc $(A - \lambda I_n)$ n'est pas injective, donc son déterminant est nul. Or $\det(A - \lambda I_n) = -\chi_A(\lambda)$. Donc λ est bien une racine de χ_A.

($\Leftarrow$) On suppose que λ est racine de χ_A. $(\lambda I_n - A)$ n'est pas injective. Donc il existe x non nul tel que $(\lambda I_n - A)x = 0$, puis $Ax = \lambda x$, donc λ est une valeur propre dont x est un vecteur propre.

□

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace E_λ.

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. On appelle multiplicité algébrique de λ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_A.

Théorème 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. La multiplicité algébrique de λ est supérieure (au sens large) à la multiplicité géométrique, qui est elle même au moins 1.

Définition 10 – Rayon spectral

On suppose ici qu'on a une norme sur $\mathbb{K}$. Typiquement, la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rayon spectral de u et on note $\rho(u)$ la plus grande valeur propre en module :

$$\rho(u) = \sup \{\|\lambda\| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)\}$$

Le rayon spectral représente l'étirement maximum que peut subir un vecteur propre. Ça caractérise donc l'étirement des longueurs par l'application du morphisme. Cela présente un intérêt quand on applique beaucoup de fois le même morphisme (dans le cadre des systèmes dynamiques : équations différentielles et suite récurrentes ; cf. infra l'exemple avec la suite de Fibonnaci). En effet, si un vecteur est étiré en appliquant une fois le morphisme, il sera étiré du carré de ce rapport en l'appliquant 2 fois, etc.. Cela permet donc de voir que ce vecteur va diverger à vitesse exponentielle. Au contraire, si un vecteur est contracté, en itérant le morphisme, on va obtenir des vecteurs qui convergent vers 0.

Le rayon spectral est donc une caractérisation de la stabilité du système.

Proposition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si 0 est valeur propre de u, le sous-espace propre associé à 0 est le noyau de u. Si 0 n'est pas une valeur propre, alors $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$.

Corollaire 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est un automorphisme (endormorphisme bijectif) si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}\,(u)$.

2 Réduction des endomorphismes

Rentrons maintenant dans le vif du sujet. On va s'aider des éléments propres pour rendre la matrice plus simple. En effet, si l'image d'un vecteur e_1 par u n'est que lui même à une dilatation de rapport λ_1 prêt, la première colonne de la matrice de u dans une base de la forme $(e_1, \dots, e_n)$ est simplement le coefficient de cette dilatation (λ_1)dans la tout en haut. S'il en va de même pour e_2, avec un rapport de dilatation de λ_2, la seconde colonne de la matrice ne contiendra qu'un λ_2 en seconde position. Etc.. On voit que dans ce cas idéal, la matrice est diagonale. Nous allons explorer ce cas. D'abord, les propriétés des matrices diagonales, puis comment rendre une matrice diagonale.

2.1 Matrices diagonales

Les matrices diagonales sont assez simples. On ne peut pas les réduire davantage. Mais on peut étudier leurs propriétés.

Définition 11

Une matrice diagonale est une matrice dont seuls les éléments sur la diagonales sont éventuellement non nuls. C'est à dire qu'elles sont de la forme

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Exemple 6

La matrice nulle et la matrice identité et ses multiples (dites matrices scalaires) sont des matrices diagonales.

On rappelle que l'image d'un vecteur de la base (donc de la forme $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, avec le 1 en position i) par une matrice diagonale est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice, donc simplement $d_i e_i$. On peut donc facilement déduire les éléments propres de la matrice.

Proposition 2

Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les coefficients diagonaux et e_i est un vecteur propre associé à d_i.

Démonstration. Immédiat par le calcul. Ou alors, se rappeler du polynôme caractéristique d'une matrice diagonale. □

On se donne quelques outils pour les exemples qui suivent.

Proposition 3

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Corollaire 2

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 12 – Exponentielle de matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit l'exponentielle de la matrice A, notée $\exp(A)$ ou e^A, par

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

On admet la convergence. De plus, on remarque que cette définition coïncide avec les réels. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En toute généralité, il est très difficile de calculer l'exponentielle d'une matrice car il faut pouvoir calculer les puissances arbitraires de cette matrice. Or, on a vu que le calcul du produit est déjà laborieux. Cependant, dans certains cas, dont les matrices diagonales, tout se passe bien.

Proposition 4

$$\exp\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\exp\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \begin{pmatrix} d_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^i \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{d_1^i}{i!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{d_n^i}{i!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d_1^i}{i!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d_n^i}{i!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(d_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Matrices diagonalisables

Définition 13

On dit qu'une matrice carrée est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

En d'autres termes, $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale tel que $A = PDP^{-1}$. Comme A et D sont semblables, beaucoup de leurs propriétés sont communes, comme le polynôme caractéristique.

Proposition 5

Soit A, une matrice diagonalisable, D une matrice diagonale et P une inversible telle que $A = PDP^{-1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$$

Démonstration. Exercice. □

Théorème 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable si et seulement si A est scindé et que la multiplicité géométrique de chaque racine est égale à sa multiplicité algébrique.

Cependant il peut être difficile de trouver la dimension d'un sous espace propre. Et la multiplicité d'une racine d'un polynôme peut être aussi très délicate à déterminer. Ce théorème est donc bien délicat à appliquer. Heureusement, il existe une version plus simple mais restreinte de ce théorème.

Théorème 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

Attention, la réciproque n'est pas vraie ! Il existe des matrices diagonalisables dont le polynôme caractéristique est scindé et a au moins une racine multiple. Réciproquement, il existe des matrices dont le polynôme est scindé et qui ne sont pas diagonalisables (elles ont alors au moins une racine multiple).

3 Applications

3.1 Application à la récurrence linéaire d'ordre n

On se propose d'étudier une suite de la forme $u_{p+n} = -a_{n-1}u_{p+n-1} - \cdots - a_0 u_p$ avec $u_0 ... u_{n-1}$ donné.

On choisit des $-$ car on peut réécrire la relation $u_{p+n} + a_{n-1}u_{p+n-1} + \cdots + a_0 u_p = 0$, ce qui est plus confortable.

Mettons ça sous forme matricielle pour rendre le tout plus sympa. On pose

$$U_p = \begin{pmatrix} u_{p+n-1} \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est appelée la matrice compagnon du polynôme $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, qu'on notera Q dans la suite.

Les conditions initiales sont alors simplement la donnée de U_0 et on a $U_{p+1} = AU_p$, et plus généralement $U_p = A^p U_0$.

Si A est diagonalisable, on peut l'écrire sous la forme PDP^{-1}, avec D diagonale, et alors $U_p = PD^pP^{-1}U_0$, ce qui est facile à calculer, une fois A sous forme diagonale.

Enfin, on peut prouver par une récurrence pénible que le polynôme caractéristique de A est Q.

3.1.1 Cas de la suite de Fibonacci

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En effet $AU_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - X - 1$. Cherchons les racines. On a $\Delta = 5$, d'où les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, qu'on notera respectivement φ et ψ. On peut vérifier que $\varphi\psi = -1$ et $\varphi + \psi = 1$ (somme et produit des racines). Mais cela prouve surtout que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples : $(X - \varphi)(X - \psi)$, donc A est diagonalisable.

On cherche des vecteurs propres. On cherche x tel que $Ax = \varphi x$. On a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \varphi x_1 \\ \phantom{x_1 + {}} x_1 = \varphi x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi x_2 + x_2 = \varphi^2 x_2 \\ \phantom{\varphi x_2 + {}} x_1 = \varphi x_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (\varphi^2 - \varphi - 1)x_2 = 0 \\ x_1 = \varphi x_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 = \varphi x_2 \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à φ et par un raisonnement similaire, $\begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à ψ.

On cherche l'inverse de $P = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Après un peu de calcul, on trouve que c'est $P^{-1} = \frac{1}{\varphi - \psi} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}$.

On a donc $A = P \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où $U_p = A^p U_0 = P \begin{pmatrix} \varphi^p & 0 \\ 0 & \psi^p \end{pmatrix} P^{-1} U_0$.

Explicitons !

$$\begin{aligned}
P\begin{pmatrix}\varphi^p & 0\\ 0 & \psi^p\end{pmatrix}P^{-1}U_0 &= P\begin{pmatrix}\varphi^p & 0\\ 0 & \psi^p\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\varphi-\psi}P\begin{pmatrix}\varphi^p & 0\\ 0 & \psi^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\psi\\ -1 & \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}P\begin{pmatrix}\varphi^p & 0\\ 0 & \psi^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}P\begin{pmatrix}\varphi^p\\ -\psi^p\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^p\\ -\psi^p\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{p+1}-\psi^{p+1}\\ \varphi^p-\psi^p\end{pmatrix}\\
&= U_p = \begin{pmatrix}u_{p+1}\\ u_p\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On trouve $u_p = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^p - \psi^p)$. Partant, on peut trouver plein de propriétés amusantes de la suites. Par exemple

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$$

On voit aussi que la suite est de l'ordre de φ^p, et que le rayon spectral de A est φ. Ce n'est pas un hasard. On peut deviner que lorsque le rayon spectral ρ est supérieur strictement à 1, la suite est de l'ordre ρ^p et diverge. Si $\rho < 1$, la suite converge (exponentiellement aussi) et si $\rho = 1$, on ne peut rien dire. Pensez aux cas $u_{n+1} = u_n$ (convergente) et $u_{n+1} = -u_n$ (divergente).

3.2 Application aux équations différentielles homogènes d'ordre 2 linéaires à coefficients constants

On se propose ici de résoudre

$$ay'' + by' + y = 0$$

avec $a \neq 0$.

On prend l'équation homogène car il est nécessaire de la résoudre avant l'équation avec second membre et que c'est la partie la plus intéressante et technique.

Tout d'abord, réécrivons l'équation.

$$ay'' + by' + y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y$$

La première forme est souvent ce qui peut apparaître dans le calcul de l'équation d'un système physique. Cependant, en math, on préfère la seconde. Allez, pour ne rien regretter, changeons le nom des variables pour avoir :

$$y'' = ay' + by$$

Il est donc inutile de préciser une contrainte (contrairement au $a \neq 0$ d'avant).

On cherche une solution $\mathcal{C}^\infty$. On va donc se placer sur cet espace vectoriel notée E. De plus, on a vu que la dérivation est un endomorphisme de cet espace vectoriel. On l'appelle D. On cherche donc les solutions à

$$D \circ D(y) = a \cdot D(y) + b \cdot y$$

Le $D \circ D$ trouble un peu la fête. Mais on peut réécrire cette équation d'ordre 2 en un système de deux équations d'ordre 1, grâce à z pour tenir le rôle de y' :

$$\begin{cases} D(y) = z \\ D(z) = az + by \end{cases}$$

ou, en considérant des paires de fonctions :

$$D\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ az + by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, on a l'équation du premier ordre $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} Y$

On sait que les solutions de $y' = Ky$ sont de la forme $x \mapsto \exp(Kx)\, C$ avec C un vecteur constant. Oui, j'ai une fonction à valeurs matricielles, chacun ses défauts.

Ici, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. Mais ne nous laissons pas abattre. Si on parvient à la diagonaliser, on pourra facilement calculer l'exponentielle de cette matrice.

Commençons donc par calculer le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned} \chi_K &= \det\left(XI_n - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} X & -1 \\ -b & X - a \end{vmatrix} \\ &= X(X - a) - (-b)(-1) \\ &= X^2 - aX - b \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique de l'équation différentielle. Ce n'est pas un hasard !

Cherchons les racines. On a $\Delta = a^2 + 4b$. On va tenter d'éviter une disjonction de cas. On prend juste $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ (ce qui existe toujours). Les racines sont donc $\lambda_1 = \frac{a+\delta}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{a-\delta}{2}$. Si $\delta = 0$, on a une racine double, ce qui est fâcheux. On examinera ce cas plus tard. Commençons par $\delta \neq 0$. On a donc deux racines simples, donc ce sont les deux valeurs propres. La matrice est diagonalisable. Joie ! Mais maintenant, il faut le faire. Cherchons les $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} j = \lambda_1 i \\ bi + aj = \lambda_1 j \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} j = \lambda_1 i \\ bi + a\lambda_1 i = \lambda_1 \lambda_1 i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} j = \lambda_1 i \\ 0 = ({\lambda_1}^2 - a\lambda_1 - b) i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} j = \lambda_1 i \\ 0 = 0i \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre λ_1. De même, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre pour λ_2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Il nous faut P^{-1} pour changer de base. On a $P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}$ (on rappelle que $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Donc $K = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$. On se souvient qu'on cherchait à calculer $\exp(xK)$. On peut réécrire ça $\exp(xPDP^{-1}) = P \exp(xD) P^{-1} =$

$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(\lambda_1 x) & 0\\ 0 & \exp(\lambda_2 x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2 & 1\\ \lambda_1 & -1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Y &= P\exp(xD)\,P^{-1}C\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(\lambda_1 x) & 0\\ 0 & \exp(\lambda_2 x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2 & 1\\ \lambda_1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp(\lambda_1 x) & 0\\ 0 & \exp(\lambda_2 x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2 c_1 + c_2\\ \lambda_1 c_1 - c_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-\lambda_2 c_1 + c_2)\exp(\lambda_1 x)\\ (\lambda_1 c_1 - c_2)\exp(\lambda_2 x)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}(-\lambda_2 c_1 + c_2)\exp(\lambda_1 x) + (\lambda_1 c_1 - c_2)\exp(\lambda_2 x)\\ \lambda_1(-\lambda_2 c_1 + c_2)\exp(\lambda_1 x) + \lambda_2(\lambda_1 c_1 - c_2)\exp(\lambda_2 x)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On voit que la seconde ligne est bien la dérivée de la première. De plus, comme c_1 et c_2 sont des constantes à ajouter en fonction des conditions initiales, on va poser $C_1 = -\lambda_2 c_1 + c_2$ et $C_2 = \lambda_1 c_1 - c_2$. Et on a $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. Il ne reste qu'à trouver C_1 et C_2 avec les conditions initiales.

Maintenant, si $\delta = 0$.

La matrice n'est pas diagonalisable. Ça se passe mal. Ce cas est moins intéressant, on va utiliser une matrice triangulaire supérieure, on parle de trigonalisation. On a $b = -\frac{a^2}{2}$.

$$K = P\begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1\\ 0 & \frac{a}{2}\end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix}\frac{2}{a} & -\frac{4}{a^2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{a^2}{4} & \frac{a}{2}\end{pmatrix}$.

Calculer l'exponentielle de ça est moins simple. Mais on peut trouver que

$$\exp\left(x\begin{pmatrix}\frac{a}{2} & 1\\ 0 & \frac{a}{2}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\exp\frac{ax}{2} & x\exp\frac{ax}{2}\\ 0 & \exp\frac{ax}{2}\end{pmatrix}$$

Le même genre de calcul que précédemment conduit à la solution qu'on connaît.

3.2.1 Les ordres supérieurs

Rien ne nous empêche de continuer ainsi aux ordres supérieurs. La seule difficulté sera de trouver les valeurs propres, car il faudra trouver les racines d'un polynôme de degré arbitraire. Cependant, si on connaît ces racines, on peut facilement trouver les solutions de l'équation différentielle.