TD2 : Plus d'applications linéaires : noyaux et images

Exercice 1:

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Donner la dimension et une base de $\ker \varphi$, et la dimension et une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Solution:

1. Soit (x_1, x_2, x_3) et $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2, x_3)) + \lambda\varphi((y_1, y_2, y_3)) &= ... \\ &= \varphi((x_1, x_2, x_3) + \lambda(y_1, y_2, y_3)) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

2. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose $u \in \ker \varphi$.

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2, x_3)) = 0 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = -3x_3 \\ 0 = x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le noyau est donc composé de vecteurs de la forme $(0, t, -t)$. Le noyau de φ est donc la droite vectorielle engendrée par $(0, 1, -1)$ (ou n'importe quel vecteur proportionnel). Par conséquent, $\ker \varphi$ est de dimension 1 et $((0, 1, -1))$ en est une base. D'après le théorème du rang, l'image est de dimension $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker \varphi = 3 - 1 = 2$.

On calcule les images de e_1, e_2 et e_3 : elles forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (1, -1) \\ \varphi(e_2) &= (1, 2) \\ \varphi(e_3) &= (1, 2) \end{aligned}$$

Cette famille contient 3 vecteurs d'un espace de dimension 2. Elle est donc nécessairement liée. Il faut trouver la plus grande sous-famille libre possible. Il y a un vecteur qui apparaît deux fois : on peut l'enlever sans réduire l'espace engendré. En effet $a(1, -1) + b(1, 2) + c(1, 2) = a(1, -1) + (b + c)(1, 2)$.

Un seul exemplaire de $(1,2)$ suffit. La famille $((1,-1),(1,2))$. Montrons que cette famille est libre :

$$\begin{aligned}
a(1,-1)+b(1,2)=0 &\Leftrightarrow (a+b,2b-a)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0\\ \quad 2b=a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3b=0\\ 2b=a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=0\\ b=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $((1,-1),(1,2))$ est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Exercice 2:

Même exercice avec

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2\\
(x_1,x_2,x_3) &\mapsto (-2x_1+x_2+x_3, x_1-2x_2+x_3)
\end{aligned}$$

Solution:

1. idem
2. Soit $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. On suppose $u\in\ker\varphi$.

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1,x_2,x_3))=0 &\Leftrightarrow (-2x_1+x_2+x_3, x_1-2x_2+x_3)=(0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0\\ \quad x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2=x_3\\ x_1-2x_2+2x_1-x_2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2=x_3\\ 3x_1-3x_2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3x_1 \quad =x_2\end{cases}
\end{aligned}$$

Le noyau des φ est donc de dimension 1 et a pour base $((1,1,1))$. L'image est donc de dimension 2. On calcule les images de e_1,e_2 et e_3 : elles forment une famille génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1)&=(-2,1)\\
\varphi(e_2)&=(1,-2)\\
\varphi(e_3)&=(1,1)
\end{aligned}$$

Cette famille contient 3 vecteurs d'un espace de dimension 2. Elle est donc nécessairement liée. Il faut trouver la plus grande sous-famille libre possible.
On remarque que $(-2,1)+(1,-2)=-(1,1)$. On peut donc engendrer $(1,1)$ avec les deux autres vecteurs, et par conséquent, s'en passer sans réduire l'espace engendré.
Les deux autres vecteurs forment une famille génératrice de l'image. De plus, on a montré que l'image est de dimension 2. Donc la famille $((-2,1),(1,-2))$ est libre et est une base de l'image.
NB : puisque l'image est $\mathbb{R}^2$, (f_1,f_2) fait aussi l'affaire.

Exercice 3:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - y, -3x + 3y) \end{aligned}$$

On admet que f est linéaire.

1. Montrer que f n'est ni surjective, ni injective.
2. Trouver une base de l'image et du noyau.

Solution: On calcule le noyau pour déterminer l'injectivité. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $(x_1, x_2) \in \ker f$.

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2)) = 0 &\Leftrightarrow (x - y, -3x + 3y) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = 3y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \end{cases} \end{aligned}$$

$\ker f = \left\{(t, t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Donc le noyau est de dimension 1 et a pour base $(1, 1)$. Donc f n'est pas injective. De plus, comme le théorème du rang nous dit que l'image de f est de dimension 1, f ne peut pas être surjective.

$$\begin{aligned} f((1, 0)) &= (1, -3) \\ f((0, 1)) &= (-1, 3) \end{aligned}$$

Cette famille est clairement liée ($(1, -3) = -(-1, 3)$). On peut donc éliminer $(-1, 3)$. D'après le théorème du rang, f est de rang 1, et $((1, -3))$ est une base de l'image de f.

Exercice 4:

Encore pareil avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

Solution: Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \ker f$.

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3)) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ 2x_1 + 2x_1 - 3x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker f = \{0\}$. Donc $\dim \ker f = 0$. (f est injective) Donc l'image de f est de dimension 3, d'où

$\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^3$. Par exemple $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 5:

Encore pareil avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) &\mapsto (x_1+x_2, x_3+x_4, x_1+x_2+x_3+x_4) \end{aligned}$$

Solution: Soit $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \ker f$.

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 = 0 \\ x_3+x_4 = 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\ker f$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(a,-a,b,-b)$. On voit immédiatement que

$$((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$$

est une base de $\ker f$. Comme le noyau est de dimension 2, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension $4-2=2$.

On calcule

$$\begin{aligned} f((1,0,0,0)) &= (1,0,1) \\ f((0,1,0,0)) &= (1,0,1) \\ f((0,0,1,0)) &= (0,1,1) \\ f((0,0,0,1)) &= (0,1,1) \end{aligned}$$

On peut enlever les vecteurs redondants. Il reste $((1,0,1),(0,1,1))$ Cette famille est génératrice de l'image. Comme l'image est de dimension 2, cette famille est également une base.

Exercice 6:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Encore pareil avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

Solution: On voit que l'espace d'arrivée est de dimension 1. On va cette fois commencer par l'image. On remarque que $(x,0,\dots,0)$ est un antécédent de x. Donc f est surjective : l'image est de dimension 1. Par le théorème du rang, on sait que le noyau est de dimension $n-1$.

Cherchons une base ! Elle doit contenir $n-1$ vecteur. La somme des composante est 0.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(& 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 &) \\
(& 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 &) \\
(& 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 &) \\
(& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots &) \\
(& 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 &)
\end{array}
$$

Forme une base du noyau de f. Il y a en effet $n-1$ vecteurs, formant une famille libre et tous dans le noyau.