TD1 : Applications linéaires

Exercice 1:

Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Trouver $\operatorname{Ker}(\varphi)$. Quelle est sa dimension ? Quelle est le rang de φ ?
3. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Solution:

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) + \lambda\varphi(y) &= \varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda\varphi(y_1, y_2, y_3) \\
&= (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) + \lambda(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 + y_2 - y_3) \\
&= (x_1 + \lambda y_1 + x_2 + \lambda y_2 + x_3 + \lambda y_3, 2x_1 + 2\lambda y_1 + x_2 + \lambda y_2 - x_3 - \lambda y_3) \\
&= \varphi(x + \lambda y)
\end{aligned}$$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. On a donc

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x_1 = x_2 \\ 2x_1 + x_2 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x_1 = x_2 \\ 2x_1 - \dfrac{3}{2}x_1 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x_1 = x_2 \\ \dfrac{1}{2}x_1 = x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_3 = x_2 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = x_3(2, -3, 1)
\end{aligned}$$

Le noyau est donc de dimension 1.

Par le théorème du rang, le rang de φ est $3 - 1 = 2$.

3. Comme l'image de φ est de dimension 2 et que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, on sait que $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2: Du pivot

En utilisant le pivot de Gauss, déterminer si la famille $\big((1,2),(1,1),(1,-1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Indice : mettre la famille sous forme échelonnée, puis utiliser le fait qu'un famille est génératrice si et seulement si elle contient une base.

> **Solution:** En appliquant la séquence d'opérations du pivot de Gauss :
>
> $$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 &\leftarrow (-1)L_2 \\ L_3 &\leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$
>
> On obtient la famille :
>
> $$\begin{matrix} (1, & 2) \\ (0, & 1) \\ (0, & 0) \end{matrix}$$
>
> Considérons sa sous-famille $\big((1,2),(0,1)\big)$. On montre facilement qu'elle est libre, or il s'agit d'une famille de cardinal 2 de $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2) donc c'est une base. Elle est donc également génératrice. Donc la famille ci-dessus contient une famille génératrice, elle l'est donc également. Et comme les opérations du pivot de Gauss conservent le caractère générateur, la famille initiale $\big((1,2),(1,1),(1,-1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3:

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x+y, x-y)$	$f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x,y,xy)$
$f_3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y+z, y-z, x+y)$	$f_4 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, 0, x-7y, x+y)$
$f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$	$f_6 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 0$
$f_7 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1$	$f_8 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+1)^2 + y - x^2 - 1$

> **Solution:**
>
> — f_1 : oui
> — f_2 : non
> — f_3 : oui
> — f_4 : non
> — f_5 : oui
> — f_6 : oui
> — f_7 : non
> — f_8 : oui

Exercice 4:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f - 3f + 2Id = 0$.

Montrer que f est un automorphisme et déterminer l'automorphisme réciproque.

Solution:

$$\begin{aligned} f \circ f - 3f + 2Id = 0 &\Leftrightarrow -f \circ f + 3f = 2Id \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3f - f \circ f) = Id \\ &\Leftrightarrow f \circ \frac{1}{2}(3Id - f) = Id \end{aligned}$$

$g := \frac{1}{2}(3Id - f)$ semble donc être un bon candidat. Il suffit de se convaincre que c'est linéaire et vérifier que $g \circ f = Id$ (puisqu'on a déjà $f \circ g = Id$).

Exercice 5:

On étudie la population d'un animal quelconque*. Les individus peuvent appartenir à deux catégorie : les juvéniles et les adultes. À chaque pas de temps, une fraction $s \in [0, 1]$ des juvéniles survivent et deviennent adultes, les adultes font en moyenne $f \in \mathbb{R}^+$ petits et meurent.

On a donc à chaque pas de temps

$$g : (j, a) \mapsto (fa, sj)$$

Exprimer l'ensemble des effectifs stationnaires de la population (quantité constante de juvéniles et d'adultes) comme le noyau d'une application linéaire.

Trouver une condition pour avoir des populations stationnaires non triviales (ie. $\neq 0$). Que se passe-t-il sinon ?

Solution: Soit p une population. Si la population est stationnaire, on a $g(p) = p$. C'est à dire $g(p) - p = 0$. Donc $p \in \operatorname{Ker}(g - Id)$.

Si la population est stationnaire, on a $fa = j$ et $sj = a$. Donc $fsj = j$. D'où $fs = 1$. Si $fs > 1$, la population diverge vers $+\infty$, et si $fs < 1$ l'espèce s'éteint.

NB : La population nulle est toujours stationnaire puisque pour toute application linéaire, le noyau contient 0.

Exercice 6:

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\to \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Solution:

1. Immédiat en utilisant la linéarité de l'intégrale.
2. Le noyau est composé des fonctions dont les intégrales sur les intervalles de la forme $[0, x]$ sont nulles. Il n'y a donc que la fonction nulle. φ est donc injective.
3. Comme on est en dimension infinie, on ne peut pas tirer quelque chose d'utile du théorème du rang. Comme l'image est composée d'intégrales, l'image est inclue dans l'espace des fonctions dérivables. Mais sont elles toutes atteintes ? La réciproque est la dérivation. Cependant, les fonctions $x \mapsto 0$

$*$. Prenons des licornes par exemple

et $x \mapsto 1$ ont la même dérivée. Elles ne peuvent donc pas être toutes dans l'image, puisque φ est injective. En effet, on constate que les fonctions dans l'image de φ vérifient $f(0) = 0$. Réciproquement, une fonction f dérivable dont la valeur en 0 est 0 est bien $\int_0^x f'(t)dt$.