TD1 : Applications linéaires

Exercice 1:

Soit

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Trouver $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Quelle est sa dimension ? Quelle est le rang de φ ?
3. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Exercice 2: Du pivot

En utilisant le pivot de Gauss, déterminer si la famille $\big((1,2),(1,1),(1,-1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Indice : mettre la famille sous forme échelonnée, puis utiliser le fait qu'un famille est génératrice si et seulement si elle contient une base.

Exercice 3:

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y)$

$f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y, xy)$

$f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y)$

$f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y)$

$f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$

$f_6 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 0$

$f_7 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1$

$f_8 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 1)^2 + y - x^2 - 1$

Exercice 4:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f - 3f + 2Id = 0$.

Montrer que f est un automorphisme et déterminer l'automorphisme réciproque.

Exercice 5:

On étudie la population d'un animal quelconque*. Les individus peuvent appartenir à deux catégorie : les juvéniles et les adultes. À chaque pas de temps, une fraction $s \in [0, 1]$ des juvéniles survivent et deviennent adultes, les adultes font en moyenne $f \in \mathbb{R}^+$ petits et meurent.

On a donc à chaque pas de temps

$$g : (j, a) \mapsto (fa, sj)$$

Exprimer l'ensemble des effectifs stationnaires de la population (quantité constante de juvéniles et d'adultes) comme le noyau d'une application linéaire.

Trouver une condition pour avoir des populations stationnaires non triviales (ie. $\neq 0$). Que se passe-t-il sinon ?

Exercice 6:

Soit

$$\varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

*. Prenons des licornes par exemple