Test : logique, ensembles, récurrence

Beaucoup de réponses sont évidentes, on n'attend pas vraiment de justifications.

1. Écrire la table de vérité de $A \Rightarrow B$.

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[A \Rightarrow B]_\sigma$

Solution:

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[A \Rightarrow B]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	tt	tt

2. Écrire explicitement $\{0, 1\} \cup \{1, 3\}$

Solution: $\{0, 1, 3\}$

3. Écrire explicitement $\{0, 1\} \cap \{1, 3\}$

Solution: $\{1\}$

4. Écrire explicitement $\{0, 1\} \setminus \{1, 3\}$

Solution: $\{0\}$

5. Donner le cardinal de $\{0, 1, 3\}$.

Solution: $\{0, 1, 3\}$ a 3 éléments.

6. Écrire explicitement $\mathcal{P}(\{0, 1, 3\})$.

Solution:

$$\mathcal{P}(\{0, 1, 3\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{0, 3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 3\}\}$$

7. Donner le cardinal de $\mathcal{P}(\{0, 1, 3\})$.

Solution: $\{0, 1, 3\}$ a 3 éléments, donc l'ensemble de ses parties a $2^3 = 8$ éléments.

8. Donner à chaque fois un exemple (celui que vous préférez) d'élément de
   (a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

   Solution:
   $$(0, 0)$$

   (b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})^2$ (Rappel : pour tout ensemble A, la notation A^2 signifie $A \times A$.)

   Solution:
   $$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

   (c) $\{2017\}^2$

   Solution:
   $$(2017, 2017)$$

9. On se donne A et B des ensembles quelconques. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ?
   (a) $A \cup B = B \cup A$

Solution: Oui.

(b) $A \setminus B = B \setminus A$

Solution: Non.

(c) $\varnothing \in \{1, \{3\}\}$

Solution: Non.

(d) $\varnothing \subseteq \{1, \{3\}\}$

Solution: Oui.

10. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Rappel : la notation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ signifie $(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+\cdots+(2\times n-1)$.

Solution: Soit $P(n)$ le prédicat sur $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Initialisation Montrons $P(1)$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1^2$:

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\times 1 - 1 = 1$$

et par ailleurs $1^2 = 1$. D'où $P(1)$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vérifié. Montrons $P(n+1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}_{=n^2 \text{ d'après } P(n)} + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + (2n+2-1) \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2 && \text{par identité remarquable.}
\end{aligned}$$

On vient bien de montrer $P(n+1)$, ce qui clôt l'hérédité.

Conclusion Par le principe de récurrence, $P(n)$ est bien vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.