Récurrences

Marc Chevalier
DI ENS

Septembre 2019

Le syndicat des étudiants oisifs a un nouveau programme : « Désormais, le lendemain des jours de vacances sera un jour de vacances. ». Les autres étudiants étaient sous le charme et tout le monde était heureux quand le programme fut accepté, avec réticence, par la direction des études. Cependant, après trois ans sans vacances, les élèves commençaient à déchanter. Le syndicat des étudiants malins, proposa une nouvelle règle : « le lendemain de l'adoption de cette nouvelle règle sera un jour de vacances ». Un jour de vacances, pas de soucis dît la direction. Et l'université ferma définitivement ses portes.

Nous allons maintenant réviser les bases de la récurrence et de l'induction.

1 Récurrence simple

Une récurrence simple consiste à prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, en montrant qu'elle est vraie l'entier 0, et que si elle est vraie pour un entier n_0 donné, alors elle est vraie également pour l'entier $n_0 + 1$.

Théorème 1 – Principe de récurrence simple

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si les propriétés $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ sont vraies, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Démonstration. On suppose $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit N l'ensemble des contre-exemples au prédicat P. C'est à dire $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$. Distinguons deux cas.

- N est vide. Dans ce cas, P est vrai partout. C'est ce qu'on veut.
- N est non vide. Comme c'est une partie de $\mathbb{N}$ il existe un plus petit élément m. On distingue deux cas.
  - $m = 0$. Or, on a supposé $P(0)$. Donc $0 \notin N$. Contradiction.

— $m \neq 0$. Donc $m > 0$. De plus, $m-1 \notin N$ (sans quoi m ne serait pas le plus petit élément de N). On a donc $P(m-1)$. Or $P(m-1) \Rightarrow P(m)$. Donc $P(m)$ est vrai, d'où $m \notin N$. Contradiction.

Ces deux cas sont donc impossibles.

Donc N est vide et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. □

Voici un exemple de récurrence, rédigée dans les règles de l'art. Cette version est correcte. Ce n'est pas la seule. Mais beaucoup de choses qui vous ont été apprises ne le sont probablement pas. Vraiment, on voit des horreurs au lycée...

Exemple 1

La somme des n premiers entiers est $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Démonstration. Soit le prédicat $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Prouvons P par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— Initialisation. Pour $n=0$, on a $\sum_{i=0}^{n} i = 0 = \frac{0\cdot 1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. D'où $P(0)$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$, prouvons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= n+1+\sum_{i=0}^{n} i\\ &= n+1+\frac{n\cdot(n+1)}{2} \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{2(n+1)+n\cdot(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

□

On peut prendre l'hérédité dans un sens un peu différent

Démonstration. Soit le prédicat $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Prouvons P par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— Initialisation. Pour $n=0$, on a $\sum_{i=0}^{n} i = 0 = \frac{0\cdot 1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. D'où $P(0)$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$, prouvons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} &\Leftrightarrow n+1+\sum_{i=0}^{n} i = n+1+\frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}\end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

□

1.1 Récurrence forte

Théorème 2 – Principe de récurrence forte

Soit $P(n)$ un prédicat portant sur une variable n entière.
Si la propriété $\forall n_0, (\forall n \in [\![0, n_0 - 1]\!], P(n)) \Rightarrow P(n_0)$ est vraie, alors la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Démonstration. En exercice. □

Exemple 2

Tout nombre supérieur à 2 possède un diviseur premier supérieur à 2.

Démonstration. Soit le prédicat, $P(n)$: n a un diviseur premier supérieur à 2. Prouvons ce prédicat sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ par récurrence forte.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$, on suppose $P(i)$.

Distinguons deux cas.

— n est premier. Dans ce cas, n est son propre diviseur premier supérieur à 2.

— n est composé. Par définition, il s'écrit sous la forme $n = pq$ avec $n > p \geqslant 2$ et $n > q \geqslant 2$. Donc tout diviseur premier de p supérieur à 2 est un diviseur premier de n. Or $P(n)$ est vrai par hypothèse de récurrence forte.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P(n)$. □

On peut remarquer que dans la récurrence forte, il n'y a pas deux phases séparées comme dans la récurrence simple. En effet, pour l'initialisation, il faut prouver $P(2)$ à partir de $\forall i \in [\![2, 1]\!], P(i)$. Or $[\![2, 1]\!] = \varnothing$, donc $\forall i \in [\![2, 1]\!], P(i)$ est toujours vrai. Donc il faut prouver $P(2)$ sans hypothèse, comme une initialisation.

2 Définition par récurrence

Définition 1 – Suites

Une famille d'éléments indexés par l'ensemble $\mathbb{N}$ est appelé une suite. L'ensemble des suites de d'éléments de l'ensemble A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Théorème 3 – Définition par récurrence

Soit E un ensemble. Soit $e \in E$ un élément de E et $f \in E \to E$ une fonction de E dans E.
Alors il existe une et unique suite $g \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} g_0 = e \\ g_{n+1} = f(g_n), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démonstration. En exercice $\square$

Exemple 3 – Suite arithmétique

Soit $i, r \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Nous appelons la suite arithmétique de valeur initiale i et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = u_n + r \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous pouvons montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i + n \cdot r.$$

Démonstration. En exercice $\square$

Exemple 4 – Suite géométrique

Nous appelons la suite géométrique de valeur initiale i et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = r \cdot u_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous pouvons montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i \cdot r^n.$$

Démonstration. En exercice □

Exemple 5 – Suite arithmético-géométrique

Nous appelons la suite arithmético-géométrique de paramètres i, a, et b la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de réels définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_{n+1} = a{\cdot}u_n + b, \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lorsque $a = 1$, nous pouvons montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = i + n \cdot b.$$

Sinon, nous pouvons montrer que,

$$u_n = a^n \cdot \left(i - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. En exercice. □

Exemple 6 – Suite des itérées d'une fonction

Nous considérons $f : E \to E$ une fonction de E dans E. Nous appelons la suite des itérées de f la suite de fonction $(g_n) \in \left(E^E\right)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie les condition suivantes :

$$\begin{cases} g_0 = Id_E, \\ g_{n+1} = f \circ g_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi notée $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Ce sujet est exploré dans l'exercice 5 du DM 2018-2019. Il s'agit de remarquer que la somme est une itérée d'incréments, le produit un itéré de sommes et la puissance une itérée de produits, puis de généraliser cette construction aux ordres supérieurs.