Raisonnement

Olivier Nicole
oliver.nicole@ens.fr

DI ENS

16 septembre 2019

Déduction

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Déduction

Exemple 1

(« Je pense » $\Rightarrow$ « je suis ») or « je pense » donc « je suis ».

Déduction

Proposition 2

1. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie ;
2. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies, alors φ_1 est une tautologie.

On peut utiliser une équivalence comme des implications dans les deux sens.

Prouver $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Théorème 1

Pour prouver $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, il suffit de prouver soit φ_1, soit φ_2.

Prouver $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$)

Théorème 2

Si on a prouvé φ_1 et qu'on a prouvé φ_2, alors on a prouvé $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ça va sans dire, mais il fallait quand même le dire...

Le raisonnement par contraposition

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie.

Le raisonnement par contraposition

Exemple 2

(« Je pense » $\Rightarrow$ « Je suis ») $\Leftrightarrow$ (« Je ne suis pas » $\Rightarrow$ « Je ne pense pas »)

Le raisonnement par contraposition

Exemple 3

Nous pouvons montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

Démonstration.

On va prouver la contraposée :
$(x > 0 \Rightarrow$ il existe un réel strictement positif plus petit que $x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose x strictement positif.
$\frac{x}{2} > 0$ et $\frac{x}{2} < x$. Donc il existe un réel strictement positif plus petit que x. $\square$

Le raisonnement par contraposition

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration.

On utilise la contraposée de $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ qui est équivalent à $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ or, comme on a $(\neg\varphi_2)$, on applique le modus ponens pour déduire $(\neg\varphi_1)$. $\square$

Le raisonnement par l'absurde

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

En français : si $(\neg\varphi)$ mène à une contradiction, alors $(\neg\varphi)$ est faux (donc φ est vrai).

Le raisonnement par l'absurde

Exemple 4

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration.

Par l'absurde, on prouve $\varphi := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On va prouver que $(\neg\varphi)$ (c'est à dire $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) implique une contradiction, c'est à dire $(\varphi \Rightarrow \bot)$. Or on sait que $(((\neg\varphi) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \varphi)$, donc φ (modus ponens). $\square$

Preuve par cas

Théorème 5

La formule $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Preuve par cas

Exemple 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Démonstration.

On veut prouver $\varphi := n \cdot (n+1)$ est pair.

$\square$

Preuve par cas

Exemple 6

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Démonstration.

On veut prouver $\varphi := n \cdot (n+1)$ est pair.
Les deux cas : $\varphi_1 :=$ n est pair ; $\varphi_2 :=$ n est impair

- φ_1 On suppose n pair, donc n est divisible par 2, $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.
- φ_2 On suppose n impair, donc $n+1$ est divisible par 2, $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

De plus, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ est vrai, donc φ est vrai. $\square$

Avec des quantificateurs

Axiome 1 – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Avec des quantificateurs

Axiome 2 – Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Avec des quantificateurs

Axiome 3 – Témoin

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E : P(x)$.

Avec des quantificateurs

Exemple 7

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul.

Avec des quantificateurs

Exemple 8

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons :

$$0 \leqslant x \text{ et}$$

$$0 \leqslant x$$

D'où :

$$0 + 0 \leqslant x + x$$

Puis :

$$0 \leqslant 2 \cdot x$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 2 \cdot x \in \mathbb{R}^+$.

Avec des quantificateurs

Un exemple de preuve erronée :

Exemple 9

Montrons que le prédécesseur de tout entier naturel est un entier naturel. Le prédecesseur de l'entier naturel 1 est 0. Or 0 est un entier naturel donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n-1) \in \mathbb{N}$. Ce raisonnement est bien entendu erroné. Nous avons en réalité montré que :

$$\exists n \in \mathbb{N} : (n-1) \in \mathbb{N}$$