Raisonnement

Olivier Nicole*

Septembre 2019

1 Déduction

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Nous pouvons appliquer le principe de déduction aux équivalences :

Proposition 2

1. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie ;
2. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies, alors φ_1 est une tautologie.

Autrement dit, on peut utiliser une équivalence comme une implication dans les deux sens.

2 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Théorème 1

Les formules

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

et

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

sont des tautologies.

*Ce document est basé sur le cours de Marc Chevalier, avec son aimable autorisation. `https://teaching.marc-chevalier.com`

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ ou/et que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

3 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. Nous commençons par donner un lemme de déduction pour les conjonctions de formules.

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Puis nous formalisons les preuves de conjonctions par la tautologie suivante.

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \Longleftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies.

4 Le raisonnement par contraposition

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Nous déduisons que la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.

On peut évidemment appliquer le modus ponens à une contraposée ; c'est le principe du modus tollendo tollens, abrégé modus tollens (du latin signifiant « procédé qui nie en niant ».)

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer le modus ponens à la contraposée de l'implication. □

5 Le raisonnement par l'absurde

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Nous obtenons la méthode de raisonnement suivante : pour prouver une proposition φ, nous pouvons supposer que φ est fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. En cas de succès, nous pouvons déduire que la proposition φ est vraie.

6 Preuve par cas

Théorème 5

La formule $(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Nous en déduisons le principe de preuve suivant. Pour prouver une formule φ du calcul propositionnel, il suffit de trouver deux formules φ_1 et φ_2 telles que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)$, et $(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$ soient des tautologies.

En appliquant le théorème de démonstration par cas, au cas particulier où le but est une disjonction $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, et les deux cas sont φ_1 et $\neg\varphi_1$. Nous obtenons la tautologie suivante :

Théorème 6

La formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.

7 Preuves avec des quantificateurs

Axiome 1 – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

Axiome 2 – Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Exemple 1

La propriété suivante :

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, (P(x) \vee P(x)))$$

est vraie.

Axiome 3 – Témoin (version 1)

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E : P(x)$.

Axiome 4 – Témoin (version 2)

Si nous pouvons prouver la propriété $\exists x \in E : P(x)$, et si à partir d'un élément $t \in E$ générique nous pouvons prouver $P(t) \Rightarrow R$ sans utiliser de propriétés particulière de t, alors nous pouvons déduire R.

Remarque 1

Nous retiendrons que pour prouver une formule quantifiée universellement, il faut faire un raisonnement sur un élément générique qui n'utilise pas les propriétés spécifiques de l'élément. Alors que pour montrer une formule quantifiée existentiellement il nous suffit de construire un exemple.
Bien entendu, pour réfuter une propriété universelle, il nous suffit de construire un contre-exemple, alors que pour réfuter une propriété existentielle, il nous faut raisonner sur un élément générique et montrer que le prédicat est faux sur cet élément (sans utiliser les propriétés particulières de cet élément).