Raisonnement

Olivier Nicole [*]

Septembre 2019

Résumé

Le calcul propositionnel étant vu, on peut donc définir les modèles de raisonnement valides et les justifier.

φ, φ_1 et φ_2 désignent des formules dans la suite.

1 Déduction

Cette première proposition décrit le modèle le plus simple et le plus naturel de raisonnement. Il s'agit du modus ponens (du latin « modus ponendo ponens » : « mode qui affirme en affirmant »). Les origines du modus ponens se trouvent les premiers logiciens grecs.

Proposition 1 – Modus ponens

Si φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_1 et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_2 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	ff
tt	$\boxed{tt}$	tt

[*] Ce document est basé sur le cours de Marc Chevalier, avec son aimable autorisation. `https://teaching.marc-chevalier.com`

□

Nous pouvons appliquer le principe de déduction aux équivalences :

Proposition 2

1. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_1 sont des tautologies, alors φ_2 est une tautologie ;
2. Si $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ et φ_2 sont des tautologies, alors φ_1 est une tautologie.

Autrement dit, on peut utiliser une équivalence comme une implication dans les deux sens.

Démonstration. Nous prouvons les deux implications de l'équivalence.

1. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_1 et $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_2 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
tt	$\boxed{tt}$	tt

2. Réciproquement, nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, lorsque l'évaluation des formules φ_2 et $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ donnent la valeur tt, alors l'évaluation de la formule φ_1 donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	ff
tt	ff	ff
$\boxed{tt}$	tt	tt

□

2 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.

Nous nous donnons la tautologie suivante pour formaliser les raisonnements sur les disjonctions.

Théorème 1

Les formules

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

et

$$((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$$

sont des tautologies.

Démonstration. Nous vérifions que pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation des formules $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$ et $((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))$ donne toujours la valeur tt.

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	ff	tt
tt	tt	ff	tt	ff
tt	tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$	$[((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	tt
ff	ff	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt	ff	tt
ff	ff	tt	tt	tt	tt
ff	tt	ff	tt	tt	tt
ff	tt	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	ff	ff	ff
tt	ff	tt	tt	tt	tt
tt	tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	tt	tt	tt	tt

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(((\varphi \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)))]_\sigma$
ff	ff	ff	tt
ff	ff	tt	tt
ff	tt	ff	tt
ff	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt
tt	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt
tt	tt	tt	tt

$\square$

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ ou/et que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

Démonstration. Supposons que nous sachions prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie. Nous pouvons utiliser le théorème précédent et le lemme modus ponens pour déduire que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.
Le même schéma de preuve fonctionne au cas où nous saurions prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie. $\square$

3 Prouver que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$

Le but de cette sous-section est de donner un schéma de preuves pour démontrer qu'une formule de calcul propositionnel de la forme $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. Nous commençons par donner un lemme de déduction pour les conjonctions de formules.

Lemme 1

Les formules φ_1 et φ_2 sont des tautologies, si et seulement si la formule $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ est une tautologie.

Puis nous formalisons les preuves de conjonctions par la tautologie suivante.

Théorème 2 – Prouver une conjonction

La formule $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2)) \Longleftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, les évaluations des formules $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))$ et $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ donnent la même valeur.

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*
ff	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*ff*	*tt*	*ff*	*tt*	*ff*
tt	*tt*	*ff*	*tt*	*ff*	*ff*
tt	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*ff*	*tt*
ff	*ff*	*tt*	*ff*	*tt*
ff	*tt*	*ff*	*ff*	*tt*
ff	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*ff*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*ff*	*tt*	*ff*	*ff*
tt	*tt*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*

□

Nous en déduisons le schéma de déduction suivant. Pour prouver que la formule $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie, il suffit de prouver que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies.

Démonstration. En effet, supposons que $(\varphi \Rightarrow \varphi_1)$ et $(\varphi \Rightarrow \varphi_2)$ soient des tautologies. Par le lemme 1, nous savons que $((\varphi \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi \Rightarrow \varphi_2))$ est une tautologie. Puis par le théorème 2, nous déduisons que $(\varphi \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$ est une tautologie. □

4 Le raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition permet de prouver une implication en prouvant que la négation de son but implique la négation de sa prémisse. Ce raisonnement est formalisé par par la tautologie suivante :

Théorème 3 – Contraposée

La formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Leftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ est une tautologie

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Longleftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ donne toujours la valeur tt.

$$\varphi_3 := ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Longleftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$$

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi \Rightarrow \varphi_1)]_\sigma$	$[(\neg\varphi_2)]_\sigma$	$[(\neg\varphi_1)]_\sigma$	$[((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$
ff	ff	tt	tt	tt	tt	tt
ff	tt	tt	ff	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt	ff	ff	tt
tt	tt	tt	ff	ff	tt	tt

□

Nous déduisons que la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.

Démonstration. Par le théorème de démonstration par contraposée, la formule :

$$((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \Longleftrightarrow ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$$

est une tautologie.

Montrons maintenant les deux directions dans l'équivalence qui nous intéresse :

1. Supposons que $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ soit une tautologie.
   Les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies, donc les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ sont des tautologies. Donc la formule $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.
2. Supposons que $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie.
   Les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ sont des tautologies, les deux formules $((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \iff ((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1)))$ et $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ sont des tautologies. Donc la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie.

Ainsi la formule $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une tautologie si et seulement si $((\neg\varphi_2) \Rightarrow (\neg\varphi_1))$ est une tautologie. □

Exemple 1

Nous pouvons montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si x est plus petit que tous les réels strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
Raisonnons par contraposition, en supposant que x n'est pas inférieur ou égal à 0.
Ainsi, x est strictement supérieur à 0.
Nous avons $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2} > 0$ donc :

$$0 < \frac{x}{2} < x.$$

Donc il existe un nombre réel strictement positif et plus petit que x.

Ainsi, si x est plus petit que tous les réel strictement positifs, alors x est inférieur ou égal à 0. □

On peut évidemment appliquer le modus ponens à une contraposée ; c'est le principe du modus tollendo tollens, abrégé modus tollens (du latin signifiant « procédé qui nie en niant ».)

Corollaire 1 – Modus tollens

Si $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ et $(\neg\varphi_2)$ sont des tautologies, alors $(\neg\varphi_1)$ est une tautologie.

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer le modus ponens à la contraposée de l'implication. □

5 Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver qu'un formule φ est une contradiction en montrant que supposer que ce soit une tautologie implique que $\perp$ est une tautologie.

Le raisonnement par l'absurde est formalisé par la tautologie suivante :

Théorème 4 – Raisonnement par l'absurde

La formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ donne toujours la valeur tt.

$[\varphi]_\sigma$	$[(\neg\varphi)]_\sigma$	$[\perp]_\sigma$	$[((\neg\varphi) \Rightarrow \perp)]_\sigma$	$[(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)]_\sigma$
ff	tt	ff	ff	tt
tt	ff	ff	tt	tt

□

Nous obtenons la méthode de raisonnement suivante : pour prouver une proposition φ, nous pouvons supposer que φ est fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. En cas de succès, nous pouvons déduire que la proposition φ est vraie.

Démonstration. Supposons que $((\neg\varphi) \implies \perp)$ soit une tautologie. Par le théorème de démonstration par l'absurde, nous savons par ailleurs que la formule $(((\neg\varphi) \Rightarrow \perp) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie. Donc par le modus ponens, la formule φ est une tautologie. □

Exemple 2

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.

Soient p, q deux entiers tels que :

1. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$
2. $\frac{p}{q}$ soit irréductible.

Nous aurions donc :

$$p = \sqrt{2} \cdot q.$$

Puis, en prenant les carrés à droite et à gauche :

$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Ainsi 2 est un diviseur de p^2. Comme 2 est un nombre premier, c'est un diviseur de p.
Soit donc un entier k tel que $p = 2 \cdot k$. Nous avons donc :

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2.$$

Puis :

$$2 \cdot k^2 = q^2.$$

Donc 2 est un diviseur de q^2. Comme 2 est un nombre premier, c'est un diviseur de q.
Ainsi 2 est un diviseur commun de p et q, ce qui est absurde puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a donc une contradiction.
Ainsi $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. □

6 Preuve par cas

La preuve par cas consiste à séparer une preuve en plusieurs sous cas qui couvrent tous les cas possibles, et à montrer le but dans tous les sous cas. Cette technique de preuve est formalisée par la tautologie suivante.

Théorème 5

La formule $(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$ donne toujours la valeur tt.

$$\varphi_3 := ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi))$$

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)]_\sigma$	$[(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$
ff	*ff*	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*	*ff*
ff	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*ff*	*ff*
ff	*tt*	*ff*	*tt*	*ff*	*tt*	*ff*
ff	*tt*	*tt*	*tt*	*ff*	*ff*	*ff*
tt	*ff*	*ff*	*ff*	*tt*	*tt*	*ff*
tt	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*ff*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*	*tt*

$$\varphi_4 := ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi))$$
$$\varphi_5 := (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow \varphi)$$

□

$[\varphi]_\sigma$	$[\varphi_4]_\sigma$	$[\varphi_5]_\sigma$
ff	*ff*	*tt*
ff	*ff*	*tt*
ff	*ff*	*tt*
ff	*ff*	*tt*
tt	*ff*	*tt*
tt	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*tt*
tt	*tt*	*tt*

Nous en déduisons le principe de preuve suivant. Pour prouver une formule φ du calcul propositionnel, il suffit de trouver deux formules φ_1 et φ_2 telles que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi)$, et $(\varphi_2 \Rightarrow \varphi)$ soient des tautologies.

Exemple 3

Démontrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Démonstration. Soit n un entier.
Nous savons que l'entier n est soit pair ou soit impair.

1. Supposons que n est pair.
   Nous savons que n est divisible par 2, puis $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.
2. Supposons que n est impair.
   Nous savons que $n+1$ est divisible par 2, puis $n \cdot (n+1)$ est divisible par 2.

Ainsi, dans tous les cas, n est divisible par 2. □

En appliquant le théorème de démonstration par cas, au cas particulier où le but est une disjonction $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, et les deux cas sont φ_1 et $\neg\varphi_1$. Nous obtenons la tautologie suivante :

Théorème 6

La formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ est une tautologie.

Démonstration. Nous vérifions que, pour tout environnement σ que, quelle que soit l'évaluation des formules φ_1, φ_1 et φ_2 sur l'environnement σ, l'évaluation de la formule $(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))$ donne toujours la valeur tt.

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(\neg\varphi_1)]_\sigma$	$[((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma$	$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma$
ff	ff	tt	ff	ff
ff	tt	tt	tt	tt
tt	ff	ff	tt	tt
tt	tt	ff	tt	tt

$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[(((\neg\varphi_1) \Rightarrow \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_\sigma$
ff	ff	tt
ff	tt	tt
tt	ff	tt
tt	tt	tt

□

7 Preuves avec des quantificateurs

Raisonner sur des formules avec des quantificateurs est plus compliqué, surtout lorsqu'ils portent sur des éléments d'ensembles infinis. Il n'est plus possible de passer par des tables de vérité (ou alors, il en faudrait de taille infinie).

L'axiome de généralisation permet de prouver une formule quantifiée universellement. Le principe de déduction est le suivant. Pour prouver une formule du type $\forall x \in E, P(x)$, nous prenons un élément $e \in E$ arbitraire, et nous prouvons $P(e)$ sans utiliser aucune propriété spécifique de l'élément e. Nous en déduisons alors que $P(x)$ est satisfait quelque soit l'élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Axiome 1 – Généralisation ou abstraction

Si nous pouvons prouver la propriété $P(t)$ pour $t \in E$ arbitraire (ie sans utiliser de propriété spécifique de t), alors nous pouvons en déduire la propriété $\forall x \in E, P(x)$.

La preuve d'une une formule quantifiée universellement est générique et peut s'appliquer à n'importe quel élément $e \in E$ de l'ensemble E en particulier.

Axiome 2 – Concrétisation

Si nous pouvons prouver une propriété $\forall x \in E, P(x)$, alors nous pouvons prouver $P(x)$ pour n'importe quel élément $x \in E$ de l'ensemble E.

Exemple 4

La propriété suivante :

$$(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, (P(x) \vee P(x)))$$

est vraie.

Pour prouver une formule quantifiée existentiellement, il nous suffit de trouver un élément témoin tel que la propriété soit satisfaire pour cet élément. Contrairement à l'axiome 7 nous pouvons utiliser les propriétés spécifiques de notre élément témoin.

Axiome 3 – Témoin (version 1)

Si nous pouvons prouver la propriété $P(e)$ pour un élément $e \in E$ en particulier, alors nous pouvons en déduire la propriété $\exists x \in E : P(x)$.

Lorsqu'une formule quantifiée existentiellement est vraie, nous pouvons choisir un élément témoin qui satisfait cette formule, et l'utiliser dans des preuves ultérieurs. Ce raisonnement est formalisé par l'axiome suivant :

Axiome 4 – Témoin (version 2)

Si nous pouvons prouver la propriété $\exists x \in E : P(x)$, et si à partir d'un élément $t \in E$ générique nous pouvons prouver $P(t) \Rightarrow R$ sans utiliser de propriétés particulière de t, alors nous pouvons déduire R.

Exemple 5

Montrons que le double de tout réel positif ou nul, est un réel positif ou nul. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons :

$$0 \leqslant x \text{ et}$$
$$0 \leqslant x$$

D'où :

$$0 + 0 \leqslant x + x$$

Puis :

$$0 \leqslant 2 \cdot x$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 2 \cdot x \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 6

Nous donnons l'exemple d'une preuve erronée. Montrons que le prédécesseur de tout entier naturel est un entier naturel. Le prédecesseur de l'entier naturel 1 est 0. Or 0 est un entier naturel donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n-1) \in \mathbb{N}$. Ce raisonnement est bien entendu erroné. Nous avons en réalité montré que :

$$\exists n \in \mathbb{N} : (n-1) \in \mathbb{N}$$

Remarque 1

Nous retiendrons que pour prouver une formule quantifiée universellement, il faut faire un raisonnement sur un élément générique qui n'utilise pas les propriétés spécifiques de l'élément. Alors que pour montrer une formule quantifiée existentiellement il nous suffit de construire un exemple.
Bien entendu, pour réfuter une propriété universelle, il nous suffit de construire un contre-exemple, alors que pour réfuter une propriété existentielle, il nous faut raisonner sur un élément générique et montrer que le prédicat est faux sur cet élément (sans utiliser les propriétés particulières de cet élément).