Logique
Calcul des propositions et des prédicats

Olivier Nicole*
DI ENS

14 septembre 2020

Table des matières

1 Calcul des propositions

1.1 Syntaxe

Définition 1 – Alphabet

Un symbole est l'une de ces quatre entités :
- une variable propositionnelle (ou proposition atomique, ou atome) : A, B, C, A_0, ..., A_n ;
- une constante : $\top$, $\bot$;
- un connecteur logique : $\vee$, $\wedge$, $\neg$;
- une paire de séparateurs : (,).

*Ce document est repris du cours de Marc Chevalier, avec son aimable autorisation. `https://teaching.marc-chevalier.com`

Définition 2 – Formules

L'ensemble des formule est définie par induction par :

- les variables et constantes propositionnelles sont des formules ;
- si φ_1 et φ_2 sont des formules :
  - $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ est une formule ;
  - $\varphi_1 \vee \varphi_2$ est une formule ;
  - $\neg\varphi_1$ est une formule ;
  - (φ_1) est une formule.

Définition 3 – Priorité des opérateurs

Les opérateurs par ordre de priorité décroissante :

- $\neg$;
- $\wedge$;
- $\vee$.

Définition 4 – Taille d'une formule

Étant donné une formule φ, on définit sa taille $|\varphi|$ par :

- 1 si φ est une variable ou constante propositionnelle ;
- $|\varphi_1|$ si $\varphi = (\varphi_1)$;
- $1 + |\varphi_1|$ si $\varphi = \neg\varphi_1$;
- $1 + \max(|\varphi_1|, |\varphi_2|)$ si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ ou $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$;

où φ_1 et φ_2 sont des formules du calcul propositionnel.

Définition 5

On définit l'ensemble des variables par induction sur les formules de la manière suivante :

- $\mathrm{Var}(A) = \{A\}$ si A est une variable propositionnelle ;
- $\mathrm{Var}(\top) = \varnothing$;
- $\mathrm{Var}(\bot) = \varnothing$;
- $\mathrm{Var}(\neg\varphi) = \mathrm{Var}(\varphi)$ si φ est une formule du calcul propositionnel ;
- $\mathrm{Var}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{Var}(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}(\varphi_2)$ si φ_1 et φ_2 sont deux formules du calcul propositionnel ;
- $\mathrm{Var}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \mathrm{Var}(\varphi_1) \cup \mathrm{Var}(\varphi_2)$ si φ_1 et φ_2 sont deux formules du calcul propositionnel.

1.2 Sémantique

Définition 6 – Environnement

Soit V un ensemble de variables propositionnelles. Un environnement sur V est une fonction de $V \to \mathcal{B}$.

Définition 7 – Évaluation

Soient φ une formule et V un sur-ensemble fini de $\mathrm{Var}(\varphi)$. Notons $V := \{A_1, \ldots, A_n\}$. Soit σ un environnement sur V.
Nous définissons l'évaluation $[\varphi]_\sigma$ de φ sur l'environnement σ par induction de la manière suivante :

- $[\bot]_\sigma = \mathit{ff}$;
- $[\top]_\sigma = \mathit{tt}$;
- $[A_i]_\sigma = \sigma(A_i)$;
- $[(\varphi)]_\sigma = [\varphi]_\sigma$;
- $[(\neg\varphi)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi]_\sigma = \mathit{ff}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
- $[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ ou si } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon} ; \end{cases}$
- $[(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} \mathit{tt} & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = \mathit{tt} \text{ et si } [\varphi_2]_\sigma = \mathit{tt}, \\ \mathit{ff} & \text{sinon.} \end{cases}$

Définition 8 – Table de vérité

Soient φ une formule et V un sur-ensemble de $\mathrm{Var}(\varphi)$ non vide. La sémantique de la formule φ (paramétrée par V) est une fonction associant chaque environnement σ sur V à la valeur $[\varphi]_\sigma$ prise par φ pour l'environnement σ. Cette fonction est aussi appelée table de vérité. Elle est notée $[\![\varphi]\!]_V$.

Définition 9 – Équivalence sémantique

Soit φ_1 et φ_2 deux formules du calcul propositionnel. Nous dirons que φ_1 et φ_2 sont équivalentes sur le point sémantique si et seulement si les deux tables de vérités coïncident ie. $[\![\varphi_1]\!]_{\mathrm{Var}(\varphi_1)\cup\mathrm{Var}(\varphi_2)} = [\![\varphi_2]\!]_{\mathrm{Var}(\varphi_1)\cup\mathrm{Var}(\varphi_2)}$. Dans ce cas, nous noterons $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Définition 10 – Tautologie

Soit φ une formule. Nous dirons que φ est une tautologie si et seulement si $\varphi \equiv \top$.

Définition 11 – Contradiction

Soit φ une formule. Nous dirons que φ est une contradiction si et seulement si $\varphi \equiv \bot$.

1.3 Autres connecteurs logiques

Définition 12 – Implication

On introduit le connecteur $\Rightarrow$: $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = ff \text{ ou } [\varphi_2]_\sigma = tt \\ ff & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

Proposition 1

Nous avons :

$$(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee \varphi_2).$$

Proposition 2

Nous remarquons que $(\bot \Rightarrow \varphi_1)$ est une tautologie

Définition 13 – Équivalence

On introduit le connecteur $\Leftrightarrow$: $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ est une formule propositionnelle. On lui donne la sémantique :

$$[(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)]_\sigma = \begin{cases} tt & \text{si } [\varphi_1]_\sigma = [\varphi_2]_\sigma \\ ff & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

Proposition 3

Nous avons :

$$(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)).$$

1.4 Les règles de calcul

Proposition 4 – De Morgan

$$(\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \wedge (\neg\varphi_2))$$
$$(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \equiv ((\neg\varphi_1) \vee (\neg\varphi_2))$$

Proposition 5 – Tiers exclu

$$(\neg(\neg\varphi_1)) \equiv \varphi_1$$

Proposition 6

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :
- $\varphi_1 \equiv \varphi_1$ (réflexivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ alors $\varphi_1 \equiv \varphi_3$ (transitivité) ;
- si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ alors $\varphi_2 \equiv \varphi_1$ (symétrie).

Corollaire 1

$$(\neg(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)) \equiv (\varphi_1 \wedge (\neg\varphi_2))$$

2 Calcul des prédicats

2.1 Définitions

Définition 14 – Prédicat atomique

Un prédicat atomique est une proposition avec des variables libres.

Définition 15 – Prédicat

Un prédicat est formé à partir de prédicats atomiques, des connecteurs logiques habituels, ainsi que des quantificateurs, que nous allons introduire par la suite.

Définition 16 – Quantificateur universel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\forall x \in E, P(x))$ est vraie si et seulement si pour tout élément $x \in E$, $P(x)$ est vrai.

Définition 17 – Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists x \in E : P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.

Proposition 7

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\forall x \in \varnothing : P(x).$$

est satisfaite.

Proposition 8

Soit P un prédicat portant sur les éléments de l'ensemble vide. Alors la propriété :

$$\exists x \in \varnothing : P(x).$$

est fausse.

Proposition 9

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $(\forall x \in X, P(x))$;

— $(\neg(\exists x \in X : (\neg P(x))))$.

Proposition 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $(\exists x \in X : P(x))$;

— $(\neg(\forall x \in X, (\neg(P(x)))))$.

Définition 18

Soit $P(x)$ un prédicat portant sur les éléments de E. Nous dirons que la propriété $(\exists! x \in E : P(x))$ est vraie si et seulement si il existe un unique élément $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai.