

Relations et fonctions

Olivier Nicole*
DI ENS

Septembre 2020

Définition 1 – Relation

Une relation entre les ensembles A et B est une partie de $A \times B$. Par exemple, si on a $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$, et que $(a, b) \in \mathcal{R}$, on dit que « a est dans la relation \mathcal{R} avec b ». On abrège parfois $(a, b) \in \mathcal{R}$ en $a\mathcal{R}b$.

Définition 2 – Relation fonctionnelle

Nous appelons une relation fonctionnelle de l'ensemble A vers l'ensemble B une partie de $A \times B$ telle que pour tout élément $a \in A$, pour tout élément $b, b' \in B$, $(a, b) \in \mathcal{R}$ et $(a, b') \in \mathcal{R}$ alors $b = b'$.
On peut l'écrire

$$\forall a \in A, \forall (b, b') \in B^2, (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (a, b') \in \mathcal{R} \Rightarrow b = b'$$

Définition 3 – Relation applicative

Nous disons qu'une relation binaire \mathcal{R} entre un ensemble A et un ensemble B est une relation applicative, si et seulement si c'est une relation fonctionnelle et que pour tout élément $a \in A$ dans l'ensemble A , il existe un élément $b \in B$ dans l'ensemble B , tel que $(a, b) \in \mathcal{R}$.
On peut l'écrire

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in \mathcal{R}$$

Définition 4 – Fonctions

Une fonction est une paire (A, B, \mathcal{R}) tel que A et B soient deux ensembles et \mathcal{R} est une relation fonctionnelle entre A et B .

*Ce document est basé sur le cours de Marc CHEVALIER, avec son aimable autorisation.
<https://teaching.marc-chevalier.com>

Nous appelons l'ensemble A le domaine de définition de la fonction (A, B, \mathcal{R}) , l'ensemble B le codomaine de la fonction (A, B, \mathcal{R}) , et la relation binaire \mathcal{R} le graphe de la fonction (A, B, \mathcal{R}) .

Proposition 1

Soit A et B deux ensembles, la collection des fonctions entre l'ensemble A et l'ensemble B est un ensemble. Nous notons cet ensemble B^A .

Notation 1

Lorsque $f := (A, B, \mathcal{R})$ est une fonction, nous notons $b = f(a)$ pour dire que l'élément a de l'ensemble A et l'élément b de l'ensemble B sont en relation (pour \mathcal{R}).

Notation 2

Une fonction f entre l'ensemble A et l'ensemble B peut être noté de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} A & \rightarrow & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition 5 – Identité

Soit A un ensemble. La fonction suivante :

$$\begin{cases} A & \rightarrow & A \\ a & \mapsto & a. \end{cases}$$

est bien définie. Nous notons cette fonction Id_A .

Définition 6 – Égalité

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et les ensemble \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont égaux.

Proposition 2

Deux fonctions $f := (A, B, \mathcal{R})$ et $f' := (A', B', \mathcal{R}')$ sont égales si et seulement si les ensembles A et A' sont égaux, les ensembles B et B' sont égaux, et pour tout élément de A , nous avons $f(a) = f'(a)$.

Définition 7 – Composition

Soient A , B , et C trois ensembles et soient f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B et g une fonction entre l'ensemble B et l'ensemble C . Alors la fonction :

$$\begin{cases} A & \rightarrow & C \\ a & \mapsto & g(f(a)) \end{cases}$$

est bien définie. Nous notons cette fonction $g \circ f$.

Soient A et B deux ensembles. Soit f une fonction entre l'ensemble A et l'ensemble B .

Définition 8 – Injection

Nous disons que f est une injection si et seulement si pour toute paire d'éléments $(a, a') \in A^2$, on a : $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.

Proposition 3

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Proposition 4

Soit A , B et C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Définition 9 – Surjection

Nous disons que f est une surjection si et seulement si pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B , il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Proposition 5

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Proposition 6

Soit A , B et C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition 10 – Bijection

Une fonction qui est à la fois injective et surjective est une bijection.

Proposition 7

La fonction f est bijective si et seulement si, pour tout élément $b \in B$ de l'ensemble B , il existe un unique élément $a \in A$ de l'ensemble A tel que $b = f(a)$.

Proposition 8

Notons $f := (A, B, \mathcal{R})$ et supposons que f est une bijection. Alors le triplet (B, A, \mathcal{S}) , où la relation \mathcal{S} entre B et A est définie par :

$$b\mathcal{S}a :\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$$

est une fonction bijective entre l'ensemble B et l'ensemble A .

Nous appelons cette fonction l'inverse (ou bijection réciproque) de f , et la notons f^{-1} .

Proposition 9

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(f^{-1} \circ f) = Id_A$;
- $(f \circ f^{-1}) = Id_B$.

Corollaire 10

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Corollaire 11

Soit A, B et C des ensembles et $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. On suppose $g \circ f$ bijective, alors f est injective et g surjective.

Proposition 12

Soit g une fonction de l'ensemble B dans l'ensemble A .

Si $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$, alors f est bijective et son inverse est g .

Proposition 13

Soit f une bijection de A dans B et g une bijection de B dans A .

Si $g \circ f = Id_A$ ou $f \circ g = Id_B$, alors g est la bijection réciproque de f .

Proposition 14

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. On suppose que f et g sont bijectives. La bijection réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque 1

Il existe des fonctions f et g tel que $g \circ f = Id_A$ mais où f et g ne sont pas bijectives. Toujours le même exemple fait l'affaire.

1 Relations d'équivalence et relations d'ordre

Notation 3

Si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$ est une relation, on peut noter $a\mathcal{R}b$ pour abréger $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Définition 11

On dit que la relation $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times A)$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est :

- *réflexive*, c'est-à-dire $\forall a, b \in A^2, a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
- *transitive*, c'est-à-dire $\forall a, b, c \in A^3, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.
- *symétrique*, c'est-à-dire $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$.

Exemple 1

- La relation $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times A)$ telle que

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b$$

est une relation d'équivalence.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ telle que

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ est un multiple de } n$$

est une relation d'équivalence, appelée la « congruence modulo n ».

Définition 12

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times A)$ une relation d'équivalence. On appelle classe d'équiva-

lence de $x \in A$ l'ensemble :

$$\text{cl}(x) := \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$$

Définition 13

On dit que la relation $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times A)$ est une relation d'ordre si et seulement si elle est :

- *réflexive*, c'est-à-dire $\forall a, b \in A^2, a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
- *transitive*, c'est-à-dire $\forall a, b, c \in A^3, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.
- *antisymétrique*, c'est-à-dire $\forall a, b \in A, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$.

Exemple 2

- La relation \leq sur \mathbb{R} est une relation d'ordre.
- Pour tout ensemble E , la relation \subseteq sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.