Partiel de mathématiques (partie logique)

1 Ensembles

Soient A et B deux ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

Solution: Notons P la proposition de gauche et Q celle de droite :

$$P \overset{\text{def}}{\equiv} A \cup B = A \cap B$$
$$Q \overset{\text{def}}{\equiv} A = B$$

Pour montrer l'équivalence, montrons que $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

- Supposons P vraie. Pour montrer $A = B$, montrons que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.
  - Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ par définition d'une union. Or $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$. Puisque $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A *et* B, cela implique que $x \in B$. On vient de montrer : $A \subseteq B$.
  - La preuve que $B \subseteq A$ est le symétrique de la preuve précédente en échangeant A et B.

  Ainsi $A = B$. D'où : $P \implies Q$.
- Supposons Q vraie, c'est-à-dire $A = B$. Alors

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup A \\ &= A \\ &= A \cap A \\ &= A \cap B && \text{c'est-à-dire } P. \end{aligned}$$

  D'où : $Q \implies P$.

2 Récurrence

1. Étudier le signe de $(x+1)(x^2 - x - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Solution:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0			$+$			
x^2-x-1			$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle de n, notée $n!$, par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$. On pourra utiliser la question précédente.

Solution: Soit $Q(n)$ le prédicat « $n! \geqslant n^2$ ». D'abord, l'initialisation : montrons que $4! \geqslant 4^2$. La factorielle de 4 est égale à 24 et son carré à 16, donc c'est vrai. Maintenant, soit $n \geqslant 4$, supposons $Q(n)$ vrai et montrons $Q(n+1)$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= n! \cdot (n+1) && \text{par définition}\\ &\geqslant n^2 \cdot (n+1) && \text{d'après } Q(n)\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffirait de montrer $n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$. Or on a les équivalences suivantes :

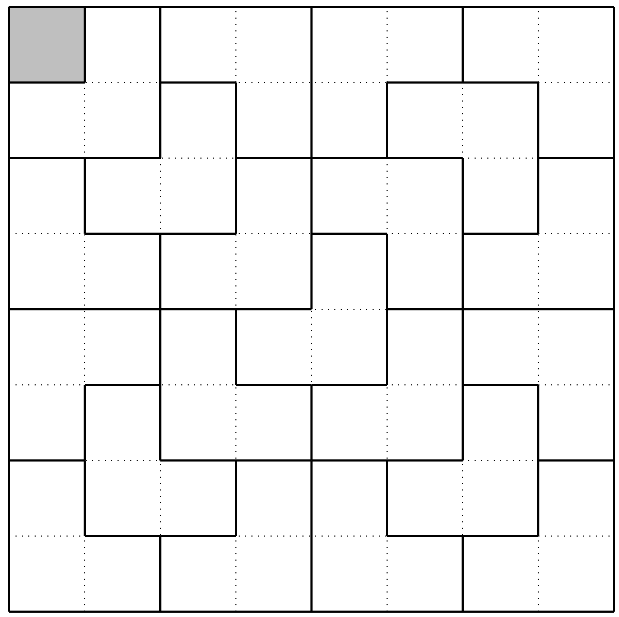
$$\begin{aligned}&n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2\\ \Longleftrightarrow\ &n^2(n+1) - (n+1)^2 \geqslant 0\\ \Longleftrightarrow\ &(n+1)(n^2-n-1) \geqslant 0\end{aligned}$$

Cette dernière proposition, d'après la question précédente, est vraie pour tout $n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui est le cas puisque par hypothèse $n \geqslant 4$. On a donc

$$(n+1)! \geqslant n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$$

$Q(n+1)$ est donc bien démontré.

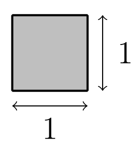
3. Soit $P(n)$ le prédicat affirmant qu'« une grille de taille $2^n \times 2^n$ peut être recouverte de tuiles en forme de L de façon à ce que toutes les cases soient recouvertes, excepté celle du coin supérieur gauche. » Voici un exemple d'un tel pavage pour $n = 3$, avec une grille de taille 8×8 :



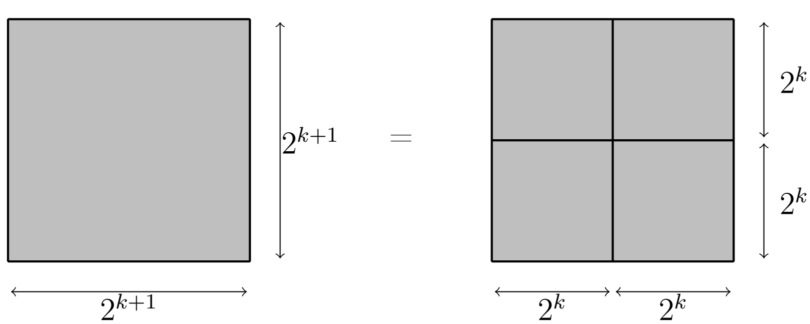
Montrer par récurrence que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution:

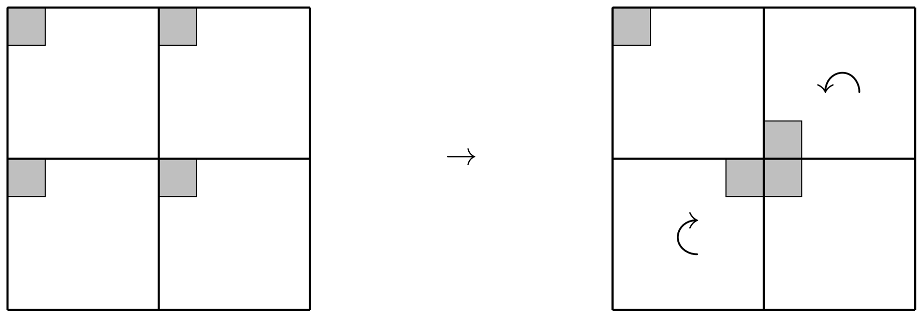
— Initialisation : il faut montrer qu'on peut paver une grille de taille $2^0 \times 2^0 = 1 \times 1$ avec des tuiles en forme de L en laissant la case supérieure gauche vide. Il se trouve que dans ce cas, la case supérieure gauche constitue l'entièreté de la grille, il suffit donc de la laisser vide :



— Hérédité : soit $k \geqslant 2$, supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire qu'on peut paver une grille de taille $2^k \times 2^k$ en laissant la case supérieure gauche vide. On doit montrer cela pour une grille de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$. On peut diviser cette grille en quatre sections, chacune de taille $2^k \times 2^k$:



La taille des sections permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence : on sait qu'on peut trouver un pavage de chaque section qui laisse sa case supérieure gauche vide. On peut ensuite tourner de 90° les sections supérieure droite et inférieure gauche afin que trois cases vides se rejoignent au milieu :



Ces trois cases vides forment alors un L, il suffit donc d'y placer une nouvelle tuile. On a alors une grille de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ avec seule la case supérieure gauche laissée vide, comme on le souhaitait.