

Partiel de mathématiques (partie logique)

1 Ensembles

Soient A et B deux ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

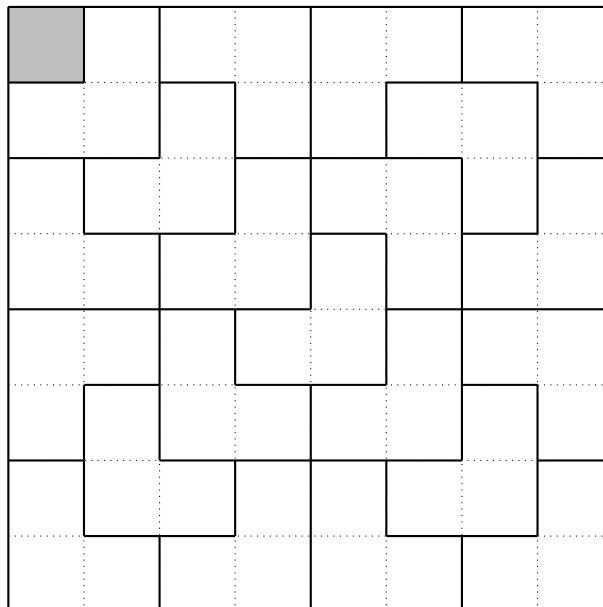
2 Récurrence

1. Étudier le signe de $(x + 1)(x^2 - x - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle de n , notée $n!$, par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n - 1) \times n$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $n! \geq n^2$. On pourra utiliser la question précédente.

3. Soit $P(n)$ le prédicat affirmant qu'« une grille de taille $2^n \times 2^n$ peut être recouverte de tuiles en forme de L de façon à ce que toutes les cases soient recouvertes, excepté celle du coin supérieur gauche. » Voici un exemple d'un tel pavage pour $n = 3$, avec une grille de taille 8×8 :



Montrer par récurrence que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.