TD : Preuve par récurrence

inspiré de Marc Chevalier

Exercice 1:

Montrer que le somme des carrés des entiers entre 0 et n est égale à

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution: On appelle P le prédicat sur $\mathbb{N}$: « $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». On prouve P par récurrence sur $\mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, on a $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$. Donc $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &\Leftrightarrow (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1))}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Exercice 2:

On note « $p \mid q$ » (prononcé « p divise q ») le fait que p est un diviseur de q, c'est-à-dire que $\exists k \in \mathbb{N},\ q = kp$.

Montrer que $3 \mid n^3 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: On note P le prédicat : $P(n) \overset{\text{def}}{\equiv} 3 \mid n^3 + 2n$.

— Initialisation. $P(0) \equiv 3 \mid 0$, ce qui est vrai.

— Hérédité. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Or d'après $P(n)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $n^3 + 2n = 3k$. Ainsi :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= \underbrace{(n^3 + 2n)}_{3k} + 3(n^2 + n + 1)\\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Soit $k' = k + n^2 + n + 1$. Alors $k' \in \mathbb{N}$ et on a montré $(n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$. D'où $3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$, c'est-à-dire $P(n+1)$.

Exercice 3:

Soit $P(n)$ le prédicat :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x \leq n \Rightarrow x = n$$

Vous devriez assez facilement voir que $P(n)$ est faux pour $n \neq 0$. Pourtant, voici une « preuve » par récurrence que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n :

— Initialisation. On veut prouver $P(0) \equiv \forall x \in \mathbb{N},\ x \leq 0 \Rightarrow x = 0$. Le seul entier naturel plus petit que 0 est 0, ce d'où $P(0)$.

— Hérédité.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose vraie l'hypothèse de récurrence $P(k)$. Montrons $P(k+1)$, c'est-à-dire montrons que pour tout naturel b, si $b \leq k + 1$ alors $b = k + 1$.
2. Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \leq k + 1$.
3. En soustrayant 1 de chaque côté de l'inéquation, on déduit que $b - 1 \leq k$.
4. Nous pouvons alors appliquer notre hypothèse de récurrence avec $x = b - 1$ pour obtenir $b - 1 = k$.
5. En ajoutant 1 de chaque côté de l'égalité, on obtient ce qu'il fallait démontrer : $b = k + 1$.

Quelles étapes sont incorrectes et pourquoi ?

Solution: L'étape fausse est la 4. Il est possible que $b = 0$, auquel cas $b - 1$ n'est pas un entier naturel. Or notre hypothèse de récurrence ne s'applique qu'aux entiers naturels.

Exercice 4: Plus difficile

Imaginons une monnaie où il n'existe que des pièces de 4 et des pièces de 5.

(a) Montrer qu'à partir d'un seuil à déterminer, toute quantité d'argent peut être représentée dans ce système. Par exemple, on peut représenter 17 € avec 3 pièces de quatre et 1 pièce de cinq.

Indice 1 : ceci est un TD sur le raisonnement par récurrence.

Indice 2 : à l'étape de l'hérédité, pour prouver $P(n+1)$, distinguez les cas selon que les pièces composant la somme n contiennent des pièces de 4, ou pas.

(b) Montrer la même chose, mais par récurrence forte.

Solution: Si on écrit formellement ce qu'on veut démontrer, ça donne ça : on veut montrer qu'il existe un seuil $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow (\exists (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ n = 4x + 5y)$$

L'équation $4x + 5y = n$ (avec x et y les inconnues) fait partie des équations dites diophantiennes. Ceux qui ont fait spé maths en terminale ont vu une méthode générale pour résoudre une telle équation. Toutefois, dans le cas qui nous occupe, on n'a pas besoin de toutes ces connaissances. En fait, elles ne feraient que nous compliquer la vie.

Cet exercice est difficile en grande partie parce qu'on ne connaît pas n_0 et qu'il faut le trouver. Pour cela, on n'a pas trop d'autre choix que de faire des essais. Prenons des petites sommes d'argent et demandons-nous si on peut les créer à partir de pièces de 4 et de 5. Oui pour 4 et 5 bien sûr, non pour 6 et 7, oui pour 8 (2×4), oui pour 9 ($4+5$), oui pour 10 (2×5), non pour 11, oui pour 12 (3×4), oui pour 13... au-delà de 12, il semblerait qu'on puisse toujours exprimer une somme d'argent sous la forme $4x + 5y$. Encore faut-il le montrer.

En continuant de décomposer « à la main » de petits entiers, on peut avoir une intuition sur comment résoudre le problème. On sait que se représente avec 3 pièces de quatre. Pour représenter 13, il suffit de prendre l'une des 3 pièces de quatre et de la remplacer par une pièce de cinq. On obtient la décomposition $13 = 2 \times 4 + 5$. On peut passer de la décomposition de 13 à celle de 14 de la même manière. L'intuition générale est : si on connaît une décomposition de n avec au moins une pièce de quatre, on peut remplacer cette pièce de quatre par une pièce de cinq pour obtenir la décomposition de $n + 1$.

Et si la décomposition de n ne contient que des pièces de cinq ? Eh bien, si par chance il y a au moins 3 pièces de cinq, on peut enlever ces 3 pièces de cinq et les remplacer par 4 pièces de quatre. En fin de compte, on a bien trouvé une décomposition de $n+1$.

(a) On voit se profiler l'ombre d'une démonstration par récurrence. Maintenant, faisons-la rigoureusement. Soit $P(n)$ le prédicat :

$$\exists (x,y) \in \mathbb{N}^2,\ n = 4x + 5y$$

Montrons que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq 12$.

Initialisation. En prenant $x = 3$ et $y = 0$, on a bien $12 = 4x + 5y$, d'où $P(12)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ plus grand que 12. Supposons $P(n)$, c'est-à-dire supposons l'existence de $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 4x + 5y$ et montrons $P(n+1)$. Deux cas sont possibles.

— soit $x \geq 1$. Dans ce cas on prend $x' \overset{\text{def}}{=} x - 1$ et $y' \overset{\text{def}}{=} y + 1$, on on montre facilement que $n + 1 = 4x' + 5y'$. Par ailleurs $(x', y') \in \mathbb{N}^2$. On a donc bien montré $P(n+1)$.

— soit $x = 0$. Dans ce cas n est un multiple de 5. Or $n \geq 12$, donc nécessairement, $n \geq 15$ et $y \geq 3$. On peut donc poser $x' \overset{\text{def}}{=} 4$ et $y' \overset{\text{def}}{=} y - 3$ et constater que, d'une part, $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ et que d'autre part :

$$n + 1 = 4x' + 5y'$$

d'où $P(n+1)$.

On en conclut que notre intuition était correcte : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 12 \Rightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{N}^2,\ n = 4x + 5y$.

(b) On peut utiliser une forme particulière de récurrence forte : on va montrer que P est vrai pour 12, 13, 14, 15 et 16. Ensuite, on va montrer que pour tout n, si $P(n-4)$ est vraie, alors $P(n)$ l'est aussi. Cela suffit à montrer que $P(n)$ est vrai pour tout n (plus grand que 12).

Initialisation. Montrer $P(12)$,$P(13)$,$P(14)$ et $P(15)$. Je vous laisse faire, c'est facile !

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ plus grand que 12. Supposons $P(n-4)$ vraie, c'est-à-dire supposons qu'on peut décomposer $n - 4$ en pièces de quatre et de cinq. Alors il suffit d'ajouter une pièce de quatre à cette décomposition pour obtenir une décomposition de n. D'où $P(n)$.

On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 12 \Rightarrow P(n)$.

Exercice 5:

La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

où φ et ψ sont les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Solution: On procède par récurrence *forte*. Soit $P(n)$ le prédicat :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

Montrons que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a bien

$$\frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1-1}{\varphi - \psi} = 0 = F_0$$

d'où $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall k \in [\![0,\ n+1]\!],\ P(k)$. Autrement dit, on suppose que P est vérifié pour tous les entiers jusqu'à $n+1$ (il s'agit donc bien d'une récurrence forte). Montrons qu'alors $P(n+2)$ est vrai.
Une façon de procéder est la suivante : on va montrer que

$$P(n+2) \Leftrightarrow (0 = 0)$$

Si on réussit à faire cela, on aura montré que $P(n+2)$ est équivalent à une proposition vraie, donc que $P(n+2)$ est vraie. Allons-y :

$$\begin{aligned}
P(n+2) &\Leftrightarrow F_{n+2} = \frac{\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}}{\varphi-\psi} \text{ par définition de } P \\
&\Leftrightarrow F_{n+1}+F_n = \frac{\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}}{\varphi-\psi} \text{ par définition de } F \\
&\Leftrightarrow \frac{\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}}{\varphi-\psi} + \frac{\varphi^{n}-\psi^{n}}{\varphi-\psi} = \frac{\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}}{\varphi-\psi} \\
&\quad \text{(en utilisant } P(n) \text{ et } P(n+1)) \\
&\Leftrightarrow \psi^{n+2}-\psi^{n+1}-\psi^n = \varphi^{n+2}-\varphi^{n+1}-\varphi^n \\
&\Leftrightarrow \psi^n(\psi^2-\psi-1) = \varphi^n(\varphi^2-\varphi-1)
\end{aligned}$$

or par définition de φ et ψ :

$$\psi^2-\psi-1=0, \text{ et}$$

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

D'où :

$$P(n+2) \Leftrightarrow 0=0$$

Donc $P(n+2)$ est vrai, ce qui clôt l'hérédité.

Exercice 6:

Montrer que tout entier naturel plus grand que deux est un produit de nombres premiers.

Solution: On procède également par récurrence forte. Soit $P(n)$ le prédicat « n est un produit de nombres premiers ». On veut montrer $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Initialisation. Le nombre 2 est un nombre premier. C'est donc bien un produit de nombres premiers, avec un seul facteur : lui-même. D'où $P(2)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Supposons $P(k)$ vérifié pour tout $k \in [\![2,n]\!]$ et montrons $P(n+1)$. Deux cas sont possibles :

— soit $n+1$ est premier. Dans ce cas, il s'écrit déjà comme un produit d'un seul nombre premier (lui-même) et $P(n+1)$ est vérifié.

— soit n+1 n'est pas premier. Dans ce cas, par définition, il existe p et q dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que

$$n + 1 = pq$$

p et q sont nécessairement plus petits que $n + 1$ car, dans $\mathbb{N}$, un produit est plus grand que ses facteurs. Donc notre hypothèse de récurrence s'applique : $P(p)$ et $P(q)$ sont vrais, autrement dit, p et q s'écrivent tous deux comme des produits de nombres premiers. $n + 1$ étant égal à pq, il s'écrit donc, lui-même, comme un produit de nombres premiers. D'où $P(n + 1)$.