TD : Preuve par récurrence

inspiré de Marc Chevalier

Exercice 1:

Montrer que le somme des carrés des entiers entre 0 et n est égale à

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 2:

On note « $p \mid q$ » (prononcé « p divise q ») le fait que p est un diviseur de q, c'est-à-dire que $\exists k \in \mathbb{N},\ q = kp$.

Montrer que $3 \mid n^3 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3:

Soit $P(n)$ le prédicat :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x \leq n \Rightarrow x = n$$

Vous devriez assez facilement voir que $P(n)$ est faux pour $n \neq 0$. Pourtant, voici une « preuve » par récurrence que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel n :

— Initialisation. On veut prouver $P(0) \equiv \forall x \in \mathbb{N},\ x \leq 0 \Rightarrow x = 0$. Le seul entier naturel plus petit que 0 est 0, ce d'où $P(0)$.

— Hérédité.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose vraie l'hypothèse de récurrence $P(k)$. Montrons $P(k+1)$, c'est-à-dire montrons que pour tout naturel b, si $b \leq k+1$ alors $b = k+1$.
2. Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \leq k+1$.
3. En soustrayant 1 de chaque côté de l'inéquation, on déduit que $b - 1 \leq k$.
4. Nous pouvons alors appliquer notre hypothèse de récurrence avec $x = b-1$ pour obtenir $b - 1 = k$.
5. En ajoutant 1 de chaque côté de l'égalité, on obtient ce qu'il fallait démontrer : $b = k+1$.

Quelles étapes sont incorrectes et pourquoi ?

Exercice 4:

Imaginons une monnaie où il n'existe que des pièces de 4 et des pièces de 5.

(a) Montrer qu'à partir d'un seuil à déterminer, toute quantité d'argent peut être représentée dans ce système.

Indice 1 : ceci est un TD sur le raisonnement par récurrence.

Indice 2 : à l'étape de l'hérédité, pour prouver $P(n+1)$, distinguez les cas selon que les pièces composant la somme n contiennent des pièces de 4, ou pas.

(b) Montrer la même chose, mais par récurrence forte.

Exercice 5:

La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

où φ et ψ sont les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice 6:

Montrer que tout entier naturel plus grand que deux est un produit de nombres premiers.