# TD1 : logique propositionnelle et logique des prédicats

**Exercice 1: Des formules**

Écrire les tables de

(a) $(\neg A)$

(b) $(\neg(A \wedge B))$

(c) $((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

**Solution:**

| $[A]_\sigma$ | $[B]_\sigma$ | $[(\neg A)]_\sigma$ | $[(\neg(A \wedge B))]_\sigma$ | $[((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))]_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| $ff$ | $ff$ | $tt$ | $tt$ | $tt$ |
| $ff$ | $tt$ | $tt$ | $tt$ | $ff$ |
| $tt$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ | $ff$ |
| $tt$ | $tt$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ |

**Exercice 2: Des tables**

Trouvez des formules en fonction de $A$ et $B$ correspondantes aux tables suivantes :

| $[A]_\sigma$ | $[B]_\sigma$ | $[\varphi_1]_\sigma$ | $[\varphi_2]_\sigma$ | $[\varphi_3]_\sigma$ | $[\varphi_4]_\sigma$ | $[\varphi_5]_\sigma$ | $[\varphi_6]_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ff$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ | $ff$ | $tt$ | $tt$ | $ff$ |
| $ff$ | $tt$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ | $tt$ | $tt$ | $tt$ |
| $tt$ | $ff$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ | $ff$ | $tt$ | $ff$ |
| $tt$ | $tt$ | $tt$ | $ff$ | $ff$ | $tt$ | $tt$ | $tt$ |

**Solution:** Les solutions ne sont pas uniques. Je donne juste des solutions simples.

— $\varphi_1 \equiv (A \wedge B)$

— $\varphi_2 \equiv (\neg(A \vee B))$

— $\varphi_3 \equiv (\neg(A \Leftrightarrow B))$

— $\varphi_4 \equiv (A \Rightarrow B)$

— $\varphi_5 \equiv \top$

— $\varphi_6 \equiv B$

**Exercice 3: « Ou » exclusif**

Trouver une formule qui exprime « A ou B » dans le sens « soit A, soit B, mais pas les deux ». Écrire sa table de vérité.

**Solution:** Il y a deux solution auxquelles on peut penser naturellement, même si ce ne sont pas les seules :

— $\varphi \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$
— $\varphi \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

La table de vérité de la première est :

| $[A]_\sigma$ | $[B]_\sigma$ | $[A \vee B]_\sigma$ | $[\neg (A \wedge B)]_\sigma$ | $[(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)]_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *ff* |
| *ff* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* |
| *tt* | *ff* | *tt* | *tt* | *tt* |
| *tt* | *tt* | *tt* | *ff* | *ff* |

**Exercice 4: En langage naturel**

Les propositions suivantes sont elles vraies, ou non ?

(a) Le fait que Napoléon soit mort implique qu'il a gagné la bataille de Waterloo.

(b) Le fait que l'un de vos professeurs de mathématiques soit la reine d'Angleterre implique qu'un de vos professeurs de biologie est le roi d'Espagne.

(c) Le fait que je vais gagner au loto au moins une fois dans ma vie implique que l'eau ça mouille.

**Solution:**

(a) $A =$ « Napoléon est mort » ; $B =$ « Napoléon a gagné la bataille de Waterloo » $A$ est vrai (Napoléon est mort le 5 mai 1821 sur l'île de Saint-Hélène dans la Longwood House) ; $B$ est faux (Napoléon a perdu la bataille de Waterloo le 18 juin 1815 contre la perfide albion, l'Irlande, la Prusse, les Pays-Bas et quelques duchés et royaumes moins connus) $(A \Rightarrow B)$ est faux. Donc la phrase est fausse.

(b) $A =$ « Un de vos professeurs de mathématiques est la reine d'Angleterre » ; $B =$ « Un de vos professeurs de biologie est le roi d'Espagne ». $A$ et $B$ sont (probablement) faux. Donc $(A \Rightarrow B)$ est vrai.

(c) $A =$ « Je vais gagner au loto au moins une fois dans ma vie » ; $B =$ « L'eau mouille ». $A$ est probablement faux, mais peut aussi bien être vrai. On va dire que les deux cas sont possibles. $B$ est vrai. $(A \Rightarrow B)$ est vrai que $A$ soit vrai ou faux. Donc la phrase est vraie, même pour les plus pessimistes d'entre nous.

**Exercice 5: Proposition ou prédicat ?**

Dire pour chaque formule si c'est une proposition, un prédicat, ou ni l'une ni l'autre.

1. $x = 1$

2. $2 > 0$
3. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
4. $\forall x \in \left]0;1\right], \ln(x) < 0$
5. $42 + 3$

**Solution:**

1. Prédicat unaire
2. Proposition
3. Prédicat binaire
4. Proposition. Eh oui ! La variable $x$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *introduite* par le quantificateur.
5. Ni l'une ni l'autre, c'est juste un nombre, on ne peut pas dire qu'ils soit vrai ou faux, ce n'est donc pas une proposition.

**Exercice 6: Quantificateurs**

Exprimer sous la forme d'une formule syntaxiquement correcte de la logique des prédicats les énoncés suivants. On notera $H$ l'ensemble des humains.

1. Quelqu'un arrive.
2. Tous arrivent.
3. Personne n'arrive.
4. Tous les humains sont intelligents.
5. Certains humains sont intelligents.
6. Aucun humain n'est intelligent.
7. Seuls les humains sont intelligents.
8. Tous les humains sont soit beaux, soit intelligents.
9. Certains humains sont intelligents ou beaux.
10. Une condition nécessaire pour que $x$ soit premier est qu'il soit impair ou égal à 2.
11. Personne ne connaît tout le monde.
12. Toute personne connaît au moins une personne.
13. Il existe une personne qui connaît tout le monde.
14. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.

**Solution:** Pour chaque énoncé, il y a plusieurs formules possibles. Je n'en ai mis qu'une.

1. $\exists h \in H,\ h$ arrive.
2. $\forall h \in H,\ h$ arrive.
3. $\neg(\exists h \in H,\ h$ arrive$)$.
4. $\forall h \in H,\ h$ est intelligent.
5. $\exists h \in H,\ h$ est intelligent.
6. $\neg(\exists h \in H,\ h$ est intelligent$)$.
7. Si on note $A$ l'ensemble des animaux (par exemple) :
   $\forall a \in A,\ a$ est intelligent $\implies a \in H$.
8. $\forall h \in H, (h$ est beau $\vee\ h$ est intelligent$)$.
9. $\exists h \in H, (h$ est beau $\vee\ h$ est intelligent$)$.
10. $\forall x \in \mathbb{N},\ x$ est premier $\implies (x$ est impair $\vee\ x = 2)$.
    En effet, « $P$ est une condition nécessaire pour $Q$ » n'est qu'une autre façon de dire « $Q \Rightarrow P$ ».
11. $\neg(\exists h_1 \in H,\ \forall h_2 \in H,\ h_1$ connaît $h_2)$.
12. $\forall h_1 \in H,\ \exists h_2 \in H,\ h_1$ connaît $h_2$.
13. $\exists h_1 \in H,\ \forall h_2 \in H,\ h_1$ connaît $h_2$.
14. En notant $C$ l'ensemble des chansons et $E$ l'ensemble des enfants :
    $\exists c \in C,\ \forall e \in E,\ \neg(e$ chante $c)$.

**Exercice 7:**

Un inspecteur des services de santé visite un hôpital psychiatrique où des phénomènes étranges lui ont été signalés. Dans cet hôpital, il n'y a que des malades et des médecins, mais les uns comme les autres peuvent être sains d'esprit ou totalement fous. L'inspecteur doit faire sortir de l'hôpital les personnes qui n'ont rien à y faire, c'est à dire les malades sains d'esprit et les médecins totalement fous (quitte à les réintégrer ultérieurement en tant que malades...). Il part du principe que les personnes saines d'esprit ne disent que des choses vraies, alors que les personnes folles ne disent que des choses fausses. Dans une salle, il rencontre deux personnes (appelons-les A et B pour préserver leur anonymat). A affirme que B est fou et B affirme que A est médecin.

Après une intense réflexion, l'inspecteur fait sortir l'un des deux de l'hôpital. Lequel (et pourquoi ?)

Peut-il dire quelque chose au sujet de l'autre ?

**Solution:** Définissons quelques propositions.our changer, on va utiliser les huit premières lettre grecques.

— $\alpha \overset{\text{def}}{\equiv}$ A est médecin
— $\beta \overset{\text{def}}{\equiv}$ A est fou
— $\gamma \overset{\text{def}}{\equiv}$ B est médecin
— $\delta \overset{\text{def}}{\equiv}$ B est fou
— $\varepsilon \overset{\text{def}}{\equiv} (\alpha \Leftrightarrow \beta)$ : A doit sortir
— $\zeta \overset{\text{def}}{\equiv} (\gamma \Leftrightarrow \delta)$ : B doit sortir
— $\eta \overset{\text{def}}{\equiv} (\neg(\beta \Leftrightarrow \delta))$ : A dit que B est fou
— $\theta \overset{\text{def}}{\equiv} (\neg(\alpha \Leftrightarrow \delta))$ : B dit que A est médecin

On sait que $\eta$ et $\theta$ sont vrais.

| $[\alpha]_\sigma$ | $[\beta]_\sigma$ | $[\gamma]_\sigma$ | $[\delta]_\sigma$ | $[\varepsilon]_\sigma$ | $[\zeta]_\sigma$ | $[\eta]_\sigma$ | $[\theta]_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *ff* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* | *ff* |
| *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* | *tt* | *tt* |
| *ff* | *ff* | *tt* | *ff* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* |
| *ff* | *ff* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* |
| *ff* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* |
| *ff* | *tt* | *ff* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* |
| *ff* | *tt* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *ff* |
| *ff* | *tt* | *tt* | *tt* | *ff* | *tt* | *ff* | *tt* |
| *tt* | *ff* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* | *ff* | *tt* |
| *tt* | *ff* | *ff* | *tt* | *ff* | *ff* | *tt* | *ff* |
| *tt* | *ff* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* | *ff* | *tt* |
| *tt* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* |
| *tt* | *tt* | *ff* | *ff* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* |
| *tt* | *tt* | *ff* | *tt* | *tt* | *ff* | *ff* | *ff* |
| *tt* | *tt* | *tt* | *ff* | *tt* | *ff* | *tt* | *tt* |
| *tt* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* | *tt* | *ff* | *ff* |

Pfiou !

Il suffit de regarder tous les cas où $\eta$ et $\theta$ sont vrais. Il y a 4 cas. Dans ces 4 cas, $\varepsilon$ est vraie, alors que $\zeta$ prend les deux valeurs. Donc A doit sortir et on ne peut rien dire sur B.