

TD1 : logique propositionnelle et logique des prédicats

Exercice 1: Des formules

Écrire les tables de

- (a) $(\neg A)$
- (b) $(\neg(A \wedge B))$
- (c) $((A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$

Exercice 2: Des tables

Trouvez des formules en fonction de A et B correspondantes aux tables suivantes :

$[A]_\sigma$	$[B]_\sigma$	$[\varphi_1]_\sigma$	$[\varphi_2]_\sigma$	$[\varphi_3]_\sigma$	$[\varphi_4]_\sigma$	$[\varphi_5]_\sigma$	$[\varphi_6]_\sigma$
<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>
<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>
<i>tt</i>	<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>
<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>ff</i>	<i>ff</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>	<i>tt</i>

Exercice 3: « Ou » exclusif

Trouver une formule qui exprime « A ou B » dans le sens « soit A, soit B, mais pas les deux ». Écrire sa table de vérité.

Exercice 4: En langage naturel

Les propositions suivantes sont elles vraies, ou non ?

- (a) Le fait que Napoléon soit mort implique qu'il a gagné la bataille de Waterloo.
- (b) Le fait que l'un de vos professeurs de mathématiques soit la reine d'Angleterre implique qu'un de vos professeurs de biologie est le roi d'Espagne.
- (c) Le fait que je vais gagner au loto au moins une fois dans ma vie implique que l'eau ça mouille.

Exercice 5: Proposition ou prédicat ?

Dire pour chaque formule si c'est une proposition, un prédicat, ou ni l'une ni l'autre.

1. $x = 1$
2. $2 > 0$
3. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
4. $\forall x \in]0; 1], \ln(x) < 0$
5. $42 + 3$

Exercice 6: Quantificateurs

Exprimer sous la forme d'une formule syntaxiquement correcte de la logique des prédicats les énoncés suivants. On notera H l'ensemble des humains.

1. Quelqu'un arrive.
2. Tous arrivent.
3. Personne n'arrive.
4. Tous les humains sont intelligents.
5. Certains humains sont intelligents.
6. Aucun humain n'est intelligent.
7. Seuls les humains sont intelligents.
8. Tous les humains sont soit beaux, soit intelligents.
9. Certains humains sont intelligents ou beaux.
10. Une condition nécessaire pour que x soit premier est qu'il soit impair ou égal à 2.
11. Personne ne connaît tout le monde.
12. Toute personne connaît au moins une personne.
13. Il existe une personne qui connaît tout le monde.
14. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.

Exercice 7:

Un inspecteur des services de santé visite un hôpital psychiatrique où des phénomènes étranges lui ont été signalés. Dans cet hôpital, il n'y a que des malades et des médecins, mais les uns comme les autres peuvent être sains d'esprit ou totalement fous. L'inspecteur doit faire sortir de l'hôpital les personnes qui n'ont rien à y faire, c'est à dire les malades sains d'esprit et les médecins totalement fous (quitte à les réintégrer ultérieurement en tant que malades...). Il part du principe que les personnes saines d'esprit ne disent que des choses vraies, alors que les personnes folles ne disent que des choses fausses. Dans une salle, il rencontre deux personnes (appelons-les A et B pour préserver leur anonymat). A affirme que B est fou et B affirme que A est médecin.

Après une intense réflexion, l'inspecteur fait sortir l'un des deux de l'hôpital. Lequel (et pourquoi?)

Peut-il dire quelque chose au sujet de l'autre?