TD3 bis : Fonctions

Exercice 1:

Déterminer la nature des fonctions suivantes : injectives, surjectives, bijectives ?

(a)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (p,q) &\mapsto 2^p 3^q \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : Soit $((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2$. On suppose $f_1(a,b) = f_1(c,d)$. On a donc $2^a 3^b = 2^c 3^d$. Comme la décomposition en produit de nombres premiers est unique, on a $a = c$ et $b = d$. Donc f est injective
- Surjectivité : On va prouver que 5 n'est jamais atteint. On distingue 4 cas :
  1. $p = q = 0$: $f(p,q) = 1 \neq 5$.
  2. $p = 0$ et $q \neq 0$: $f(p,q) = 3^q$, donc multiple de 3. Or 5 n'est pas multiple de 3.
  3. $p \neq 0$ et $q = 0$: $f(p,q) = 2^p$, donc multiple de 2. Or 5 n'est pas multiple de 2.
  4. $p \neq 0$ et $q \neq 0$: $f(p,q) = 2^p 3^q$ donc multiple de 3 et de 2. Or 5 n'est pas multiple de 2, ni même de 3.

  Donc f n'est pas surjective.
- Bijectivité : Comme f n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.

(b)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, xy) \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : On a $g(1,2) = (3,2) = g(2,1)$. $(2,1)$ est différent de $(1,2)$ mais ils ont la même image. g n'est donc pas injective.
- Surjectivité : On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on tente de résoudre $g(x,y) = (a,b)$. On a donc

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ (a-y)y = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ y^2 - ay + b = 0 \end{cases}$$

Il n'existe une solution réelle pour y que si $\Delta = a^2 - 4b \geqslant 0$. Par conséquent, il n'existe pas de solution si $(a, b) = (0, 1)$.
On peut le trouver plus vite : si on prend $(a, b) = (0, 1)$, il faut que $x = -y$. Alors $xy = -x^2 \leqslant 0$. Donc $xy \neq 1$. Donc $(0, 1)$ n'est pas atteignable.

— Bijectivité : g n'est ni injective, ni surjective, donc sûrement pas bijective.

(c)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\to \mathbb{Q} \\ (p, q) &\mapsto p + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Solution: Commençons par remarquer quelques petites choses. Si $q = 1$, $h(p, q) = p + 1 \in \mathbb{Z}$. Sinon, la partie entière de $h(p, q)$ (qu'on note $\lfloor h(p, q) \rfloor$) est p et sa partie fractionnaire est (qu'on note $\{h(p, q)\}$) est $\frac{1}{q}$.

Réciproquement, si $h(p, q)$ est entier, alors $q = 1$.

— Injectivité : Soit $((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^2$. On suppose $h(a, b) = h(c, d)$. Si $h(a, b)$ est entier, alors $b = d = 1$, il vient alors que $a = c$. Sinon, on a l'égalité des parties entières et fractionnaires, donc $a = c$ et $b = d$.

— Surjectivité : La partie entière de $\frac{2}{3}$ est 0 et sa partie fractionnaire est $\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}$ n'est pas de la forme $\frac{1}{q}$ avec q entier. Donc $\frac{2}{3}$ n'est pas atteignable. h n'est pas surjective.

— Bijectivité : f_3 n'est pas surjective, donc pas bijective.

(d)

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z &\mapsto \frac{iz - i}{z + 3} \end{aligned}$$

Solution: Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Tentons de résoudre $f(z) = y$.

$$\begin{aligned} f(z) = y &\Leftrightarrow \frac{iz - i}{z + 3} = y \\ &\Leftrightarrow iz - i = y(z + 3) \\ &\Leftrightarrow iz - i = yz + 3y \\ &\Leftrightarrow iz - yz = 3y + i \\ &\Leftrightarrow (i - y)z = 3y + i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{3y + i}{i - y} \qquad \text{puisque } y \neq i \end{aligned}$$

On trouve bien une unique solution. i est bijective.

(e)

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : $j(0, 1) = 0 = j(0, 2)$. Donc j n'est pas injective.
- Surjectivité : Soit $z \in \mathbb{R}$. La paire $(1, z) \in \mathbb{R}^2$ est un antécédent de f par j. j est donc surjective.
- Bijectivité : La fonction n'est pas injective donc pas bijective.

(f)

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Solution:
- Injectivité : $k(0) = 0 = k(1)$. Donc k n'est pas injective.
- Surjectivité : Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $k(2m) = \left\lfloor \frac{2m}{2} \right\rfloor = \lfloor m \rfloor = m$. Donc $2m$ est un antécédent de m. Donc k est surjective.
- Bijectivité : Comme k n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 2:

Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1 + x^2} \end{aligned}$$

(a) f est-elle injective ?

Solution: Résolvons $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1 + x^2} = k &\Leftrightarrow 2x = k(1 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 2x = k + kx^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = kx^2 - 2x + k \end{aligned}$$

Si $k \neq 0$: $\Delta = 4 - 4k^2$. Donc si $4 > 4k^2$ (ie. $-1 < k < 1$) il y a deux solutions. f n'est donc pas injective.

(b) f est-elle surjective ?

Solution: En reprenant le calcul de la question précédente, on constate qu'il n'y a aucune solution si $|k| > 1$. Donc f n'est pas surjective.

(c) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.

Solution: En reprenant le calcul de la question 1, on constate qu'il y a une solution si et seulement si $k \in [-1; 1]$. Donc l'image de f est $[-1, 1]$.

(d) Soit

$$\begin{aligned} g : [-1; 1] &\to [-1; 1] \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

(on peut aussi noter $g = f_{|[-1;1]}^{|[-1;1]}$) Montrer que g est bijective de deux façons différentes !

Solution: En reprenant la question 1, on montre immédiatement que g est surjective (existence de la solution). Si $k = 1$ (resp. -1), il n'y a qu'une solution : 1 (resp. -1). Si $-1 < k < 1$ et $k \neq 0$, les solutions sont $\frac{1 \pm \sqrt{1-k^2}}{k}$. Mais $\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}$ est en dehors de $[-1; 1]$. Au contraire $\frac{1 \pm \sqrt{1-k^2}}{k} \in [-1; 1]$ donc c'est l'unique solution.
Si $k = 0$, 0 est trivialement la seule solution.

Autre façon. On calcule g' :

$$g'(x) = 2\frac{1 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

g' est donc positive sur $[-1; 1]$ et strictement positive sur $]-1; 1[$. g est donc strictement croissante sur cet intervalle. Donc g est bijective.

(e) Déterminer sa réciproque.

Solution: Presque déja fait :

$$\begin{aligned} g^{-1} : [-1; 1] &\to [-1; 1] \\ 0 &\mapsto 0 \\ x &\mapsto \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Exercice 3:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

(a) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution:
- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(x, x^2) \\ &= x^3 \end{aligned}$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} g \circ f(x, y) &= g(xy) \\ &= (xy, x^2y^2) \end{aligned}$$

(b) f est-elle injective ? surjective ?

Solution: f n'est rien du tout, cf. ex. 1 q. e).

(c) g est-elle injective ? surjective ?

Solution: g est évidemment injective : si $g(a) = g(b)$, alors $(a, a^2) = (b, b^2)$ d'où $a = b$.
g n'est cependant pas injective : $(0, -1)$ n'a pas d'antécédent car $-1 < 0$, mais $x^2 \geqslant 0$.

(d) $f \circ g$ est-elle injective ? surjective ?

Solution: $f \circ g$ est la fonction $x \mapsto x^3$, elle est clairement bijective.

(e) $g \circ f$ est-elle injective ? surjective ?

Solution: $g \circ f$ n'est pas injective car f le serait, et n'est pas surjective, car g le serait.

Exercice 4:
Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned}$$

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$. trouver les antécédents de y.

Solution: On cherche les solutions en x de $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x(1-x) = y \\ &\Leftrightarrow x - x^2 = y \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 1 - 4(-1)(-y) = 1 - 4y$. Il y a une unique solution pour $y = \frac{1}{4}$. Il y a deux solutions pour $y < \frac{1}{4}$ et aucune si $y > \frac{1}{4}$.

- Si $y = \frac{1}{4}$, l'unique solution est $\frac{1}{2}$.
- Si $y < \frac{1}{4}$, les solutions sont $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y}$

(b) Restreindre l'ensemble de départ et d'arriver pour rendre f bijective.

Solution: Les valeurs strictement supérieures à $\frac{1}{4}$ ne sont pas atteignables par f, donc on prend l'ensemble d'arrivée $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right]$
Pour les valeurs strictement inférieures à $\frac{1}{4}$, il y deux solution : une strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et l'autre strictement supérieure. Il faut donc n'en prendre qu'une. On peut ainsi choisir $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. NB : $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ est également correct.

Exercice 5:

(a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$.

Solution: la fonction

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \tag{1}$$
$$n \mapsto n + 1 \tag{2}$$

convient. Elle est clairement bijective., de bijection réciproque $n \in \mathbb{N}^* \mapsto n - 1$.

(b) Déterminer une bijection de $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \to \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Solution: la fonction

$$\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \to \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \tag{3}$$
$$\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1} \tag{4}$$

convient. Elle est clairement bijective., de bijection réciproque $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$.

(c) Déduire une bijection de $[0; 1] \to [0; 1[$.

Solution: On construit la fonction f qui associe x à x si x n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$ et à $\frac{1}{n+1}$ Sinon.

(d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Solution: On peut prendre la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\ &n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

La suite correspondante est $0, -1, 1, -2, 2, ...$

Exercice 6:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

(a) Montrer que f est bijective.

Solution: On dérive f :

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

On remarque que $e^x + 1 > e^x$ et comme $e^x + 1 > 1$, on a $(e^x + 1)^2 > e^x + 1 > e^x$. Donc f' est toujours strictement positive. Donc f est strictement croissante, donc f est injective.
De plus, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$, donc f est surjective, donc bijective.

(b) Montrer que $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser. Trouver sa réciproque.

Solution: Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $f(x) = y$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = y &\Leftrightarrow 1 - x^2 = y(1 + x^2) \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 = y + yx^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2(y + 1) + y - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2(y + 1) = 1 - y \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - y}{y + 1} \qquad \text{avec } y \neq -1 \end{aligned}$$

.

$\frac{1-y}{y+1}$ est positif sur $]-1; 1]$. Donc $x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$, or on résout dans $\mathbb{R}^+$. Donc $x = \sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$.
Ainsi, g est une bijection entre $\mathbb{R}^+$ et $]-1; 1]$ de bijection réciproque $y \in]-1; 1] \mapsto \sqrt{\frac{1-y}{y+1}}$.