TD3 bis : Fonctions

Exercice 1:

Déterminer la nature des fonctions suivantes : injectives, surjectives, bijectives ?

(a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ (p,q) &\mapsto 2^p 3^q \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, xy) \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\to \mathbb{Q} \\ (p,q) &\mapsto p + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} i : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\to \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z &\mapsto \frac{iz - i}{z+3} \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} j : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Exercice 2:

Soit f
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

(a) f est-elle injective ?

(b) f est-elle surjective ?

(c) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.

(d) Soit
$$\begin{aligned} g : [-1;1] &\to [-1;1] \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

(on peut aussi noter $g = f_{|[-1;1]}^{|[-1;1]}$) Montrer que g est bijective de deux façons différentes !

(e) Déterminer sa réciproque.

Exercice 3:

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad\text{et}\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto xy \qquad\qquad x \mapsto (x, x^2)$$

(a) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

(b) f est-elle injective ? surjective ?

(c) g est-elle injective ? surjective ?

(d) $f \circ g$ est-elle injective ? surjective ?

(e) $g \circ f$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4:

Soit f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned}$$

(a) Soit $y \in \mathbb{R}$. trouver les antécédents de y.

(b) Restreindre l'ensemble de départ et d'arriver pour rendre f bijective.

Exercice 5:

(a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$.

(b) Déterminer une bijection de $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \to \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(c) Déduire une bijection de $[0; 1] \to [0; 1[$.

(d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Exercice 6:

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

(a) Montrer que f est bijective.

(b) Montrer que $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser. Trouver sa réciproque.