DM 1 : logique, théorie des ensembles et fonctions

À rendre en groupe de 2 à 4.

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les questions bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

L'exercice 3 est plutôt difficile, je vous conseille de faire les autres en priorité.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

Exercice 1 : développement décimal des réels (5 points)

On admet sans démonstration les résultats suivants :

— Tout réel peut s'écrire comme une suite de chiffres entre 0 et 9, éventuellement infinie. Chaque position dans le développement décimal correspond à une puissance de dix. Il s'agit de l'écriture décimale dont nous avons l'habitude. Par exemple :

$$\begin{aligned} 42 &= 4 \cdot 10 + 2 \\ 10{,}75 &= 1 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \\ \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots &= 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

— Réciproquement, toute suite de chiffres entre 0 et 9, éventuellement infinie, correspond à un réel lorsque les positions des chiffres sont associées à des puissances de dix contigües. Par exemple : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, si on choisit d'associer à a_0 le chiffre des unités, on obtient le développement décimal :

$$0{,}121212\ldots$$

qui correspond au réel $\frac{33}{4}$.

1. Soit x le réel correspondant au développement décimal :

$$x = 0{,}9999\dots$$

Montrer que x vérifie l'équation $10x = 9 + x$. En déduire que $x = 1$.

Solution:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}9999\dots \\ \text{donc } 10x &= 9,9999\dots \\ &= 9 + x \end{aligned}$$

En soustrayant x de chaque côté, on obtient :

$$9x = 9$$

d'où, en divisant par 9 :

$$x = 1$$

On voit que deux développement décimaux différents peuvent correspondre au même réel. Lorsqu'un développement décimal se termine par une suite infinie de 9, on dit qu'il s'agit d'un développement impropre.

On admet sans démonstration le résultat suivant : si deux développements décimaux différents représentent le même réel, alors l'un des deux est impropre.

On va maintenant s'intéresser aux réels de l'intervalle $[0, 10]$. Leur particularité est que leurs développement décimaux peuvent être vus comme une suite d'éléments de $[\![0, 9]\!]$: pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$, on peut parler du réel :

$$x = c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \dots$$

on a alors $x \in [0, 10]$.

Les développements impropres correspondent aux suites qui sont *stationnaires à 9*, c'est-à-dire dont tous les éléments sont égaux à 9 à partir d'un certain rang.

2. Écrire en utilisant des symboles logiques la proposition suivante : « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 9 ».

Solution:
$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \Rightarrow a_n = 9$$

3. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des suites stationnaires à 9. En se basant sur ce qui précède, expliciter une fonction f_1 de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $[0,10[$ qui soit bijective, et justifier sa bijectivité.

Solution: **Je me suis rendu compte que la preuve de la bijectivité de f_1, si on veut la rédiger correctement, demande beaucoup d'étapes. C'était donc une question un peu trop dure et je l'ai passée en question bonus.**

On fait en sorte que f_1 associe un développement décimal au réel qu'il représente :

$$f_1\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$$

D'après les résultats présentés en début d'exercice, on sait que quelle que soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette somme est bien définie et sa valeur est dans $[0,10]$. Plus précisément, elle est dans $[0,10[$ car la seule manière d'obtenir 10 avec une telle somme est par le développement impropre $9{,}999\ldots = 10$, c'est-à-dire par la suite constante égale à 9. Or cette suite est stationnaire à 9, elle appartient donc à $\mathcal{I}$ et est exclue de l'ensemble de définition de f_1.

Montrons que f_1 est surjective : soit $y \in [0,10[$, trouvons-lui un antécédent par f_1. On sait que tout réel admet au moins un développement décimal, c'est donc le cas d'y : appelons $y_0, y_1, \ldots$ ses chiffres. Le chiffre non nul de poids le plus fort est nécessairement celui des unités. On peut le montrer par l'absurde en disant que si ce n'était pas le cas, on aurait $y \geq 10$, ce qui est faux. On peut donc bien exprimer y comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où y_0 est le chiffre des unités. En d'autres termes : $f_1\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = y$.

A-t-on montré la surjectivité ? Pas encore, il nous faut montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$! On sait déjà que c'est une suite de $[\![0,9]\!]$, encore faut-il qu'elle ne soit pas stationnaire à 9. Pour cela, on procède comme suit : si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 9, on prend le développement décimal qui correspond au même réel mais n'est pas impropre. Il est assez facile à construire : on prend le chiffre juste avant la suite infinie de 9, on l'augmente de 1, et on remplace la suite infinie de 9 par une suite infinie de 0. On a construit une suite, appelons-la $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $f_1\left((y'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = y$ et $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$. On a donc bien trouvé un antécédent à y, ce qui suffit à montrer la surjectivité de f_1.

Montrons que f_1 est injective : soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ différentes. Leur image par f_1 ne peut pas être la même car sinon ce seraient deux développements décimaux associés au même réel, ce qui comme admis plus haut impliquerait qu'au moins l'un d'eux soit impropre. Donc soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiendrait à $\mathcal{I}$, ce qui est exclu par leur définition. Ainsi $f_1\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \neq f_1\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, d'où : f_1 est injective.

f_1 étant injective et surjective, elle est donc bijective.

Exercice 2 : des fonctions bijectives (8 points)

1. Soit f la fonction :

$$f : \begin{cases}]0,10[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{5} - 1\right)\right] \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est surjective.

   Solution: On utilise le théorème des valeurs intermédiaires, qui est au programme de terminale. Ce théorème nous assure que toute valeur de $\mathbb{R}$ possède un antécédent par f, si les conditions suivantes sont vérifiées :
   – f est continue ;
   – $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
   – $\lim\limits_{x\to 10} f(x) = +\infty$.
   On vérifie facilement que ces trois conditions sont vraies grâce à nos connaissances sur la fonction tangente.

   (b) Montrer que f est injective. (On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que f est strictement croissante.)

Solution: Toute fonction strictement croissante est injective. En effet, par définition de la croissance stricte :

$$\forall x, y \in]0, 10[^2, \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Or si on prend $x \neq y$, on a soit $x < y$, soit $y < x$. Dans le premier cas, on en déduit que $f(x) < f(y)$, dans le deuxième que $f(y) < f(x)$. Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(y)$, ce qui suffit à montrer l'injectivité de f.

2. Soit g la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1] & \rightarrow &]0,1[\\ x & \mapsto & \begin{cases} 1/(n+1) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = 1/n \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que g est injective. (Indice : poser x, y tels que $g(x) = g(y)$ et montrer que $x = y$ en distinguant plusieurs cas.)

Solution: Soient x et y dans $]0, 1]$ tels que $g(x) = g(y)$. On distingue plusieurs cas :

— x et y sont tous les deux les inverses d'un entier naturel, c'est-à-dire qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = \frac{1}{m}$ et $y = \frac{1}{m}$. Alors on a $g(x) = \frac{1}{m+1}$ et $g(y) = \frac{1}{n+1}$. L'équation $g(x) = g(y)$ s'écrit donc :

$$\frac{1}{m+1} = \frac{1}{n+1}$$

ce qui, par application de la fonction inverse et soustraction de 1, se simplifie en :

$$x = y$$

— ni x, ni y ne sont l'inverse d'un entier naturel. Dans cas, $g(x) = x$ et $g(y) = y$, d'où $x = y$.

— seul x est l'inverse d'un entier naturel. On a donc $x = \frac{1}{m}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors $f(x) = f(y)$ s'écrit :

$$\frac{1}{m+1} = y$$

donc y est aussi l'inverse d'un entier naturel, ce qui contredit l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.

— le cas où seul y est l'inverse d'un entier naturel est symétrique au précédent, il est donc également impossible.

Conclusion : on a bien montré $x = y$ dans tous les cas possibles.

(b) Montrer que g est surjective.

Solution: Soit $y \in [0, 1[$, montrons que y possède un antécédent par g. Là encore, on va distinguer les cas :

— si y est l'inverse d'un entier $n \geq 2$ ($y = 1/n$), alors un antécédent de y est $1/(n-1)$. En effet, on a bien

$$g(\frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n} = y$$

par définition de g.

— sinon, alors on a $f(y) = y$, donc y est son propre antécédent.

Ces deux cas couvrent bien tous les y possibles de $[0, 1[$.

3. Soit la fonction :

$$h : \begin{cases} [0,1[& \rightarrow &]0,1] \\ x & \mapsto & 1-x \end{cases}$$

(a) Montrer que h est bijective.

Solution: Pour tout $y \in]0, 1]$, l'équation $1 - x = y$ d'inconnue admet une unique solution (à savoir : $1-y$). Cela suffit à montrer la bijectivité de h.

(b) En déduire que $g \circ h$ est une fonction bijective de $[0, 1[$ dans $]0, 1[$.

Solution: Tout d'abord, les domaines et les ensembles d'arrivée de g et h permettent bien que $g \circ h$ soit définie, de domaine $[0, 1[$ et d'ensemble d'arrivée $]0, 1[$. De plus, il s'agit d'une composée de fonctions fonctions bijective, elle est donc bijective.

4. **Question bonus.** À partir de $g \circ h$, construire une fonction j, bijective, de $[0, 10[$ dans $]0, 10[$.

Solution:
$$j : \begin{cases} [0,10[& \to &]0,10[\\ x & \mapsto & 10 \cdot (g \circ h)\left(\frac{x}{10}\right) \end{cases}$$
convient.

5. À partir des fonctions f et j, construire une bijection f_2 de $[0,10[$ dans $\mathbb{R}$.

Solution:
$$f_2 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ j$$
va bien de $[0,10[$ dans $\mathbb{R}$ et est bijective car composée de fonctions bijectives.

Exercice 3 : cardinaux finis (10 points)

Il existe plusieurs définitions équivalentes du cardinal d'un ensemble fini. Dans la suite, on prendra la définition suivante. Pour tout ensemble fini A et tout entier naturel n :

$$\text{Card}\,(A) = n \Leftrightarrow \text{il existe une bijection de } A \text{ dans } [\![1,n]\!]$$

1. En utilisant cette définition du cardinal, montrer que $\text{Card}\,(\{4,5,6\}) = 3$.

Solution: Il suffit de trouver une bijection de $\{4,5,6\}$ dans $[\![1,3]\!]$. En voici une possible :
$$f : \begin{cases} 4 \mapsto 1 \\ 5 \mapsto 2 \\ 6 \mapsto 3 \end{cases}$$
On montre très facilement qu'elle est injective et surjective. Cela suffit à prouver que $\text{Card}\,(\{4,5,6\}) = 3$.

On veut maintenant montrer par récurrence le prédicat suivant :

$$P(n) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \text{il existe une injection de } A \text{ dans } [\![1,n]\!] \Rightarrow \text{Card}\,(A) \le n$$

pour tout n entier naturel non nul.

2. Montrer que si $\mathrm{Card}\,(A) > 1$, alors A contient au moins deux éléments distincts. Attention, vous n'avez le droit d'utiliser que la définition du cardinal donnée ci-dessus. D'autres arguments, qui se baseraient sur notre compréhension intuitive de ce qu'est le cardinal, seront accueillis avec beaucoup moins d'enthousiasme. Indice : rappelez-vous que toute bijection possède une bijection réciproque.

Solution: Soit $p = \mathrm{Card}\,(A)$. On sait alors qu'il existe une bijection de A dans $[\![1, p]\!]$, appelons-la b. En tant que bijection, elle possède une bijection réciproque b^{-1}.

Par ailleurs, comme $p > 1$, $[\![1, p]\!]$ contient au moins les entiers 1 et 2. Considérons $b^{-1}(1)$ et $b^{-1}(2)$. Ils sont différents (car b^{-1} est bijective et que $1 \neq 2$) et ce sont des éléments de A (car l'ensemble d'arrivée de b^{-1} est A). On a donc bien trouvé deux éléments de A distincts.

3. S'en servir pour démontrer $P(1)$ par contraposition.

Solution: La contraposée de $P(1)$ est :

$$\mathrm{Card}\,(A) > 1 \Rightarrow \text{il n'existe pas d'injection de } A \text{ dans } [\![1, 1]\!].$$

On sait que démontrer cette contraposée revient à démontrer $P(1)$.

Supposons donc $\mathrm{Card}\,(A) > 1$. D'après la question précédente, A possède au moins deux élements distincts x et y. Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas d'injection de A dans $[\![1, 1]\!]$ (note : $[\![1, 1]\!] = \{1\}$). Supposons qu'une telle injection i existe. Alors comme $x \neq y$, $i(x) \neq i(y)$. Pourtant $i(x) \in \{1\}$ donc $i(x) = 1$, et de même pour $i(y)$. On a donc $1 \neq 1$, ce qui est faux. i ne peut donc pas exister.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vérifié. On suppose qu'il existe $f : A \to [\![1, n+1]\!]$ injective. Deux cas sont possibles : soit f est aussi surjective, soit elle ne l'est pas.

4. Montrer que si f est surjective, alors $\mathrm{Card}\,(A) = n+1$. On a donc bien $P(n+1)$ vrai dans ce cas.

Solution: Si f est surjective, comme elle est aussi injective, elle est donc bijective. On a donc une bijection de A dans $[\![1, n+1]\!]$. Par définition du cardinal, on a donc $\text{Card}\,(A) = n+1$.

On va maintenant s'intéresser au cas où f n'est pas surjective. Rappel : la proposition « f est surjective » s'écrit symboliquement :

$$\forall y \in [\![1, n+1]\!],\ \exists x \in A,\ f(x) = y$$

5. En utilisant les propriétés des quantificateurs, écrire et transformer la négation de la proposition ci-dessus afin de justifier qu'il existe un $y \in [\![1, n+1]\!]$ qui n'est l'image d'aucun élément de A par f.

Solution: La négation de la proposition s'écrit :

$$\neg(\forall y \in [\![1, n+1]\!],\ \exists x \in A,\ f(x) = y)$$

Or on sait que $\neg(\forall x,\ P(x))$ est équivalente à $\exists x,\ \neg P(x)$. La proposition est donc équivalente à :

$$\exists y \in [\![1, n+1]\!],\ \neg(\exists x \in A,\ f(x) = y)$$

On sait également que $\neg(\exists x,\ P(x))$ est équivalente à $\forall x,\ \neg P(x)$. La proposition « f n'est pas surjective » est donc équivalente à :

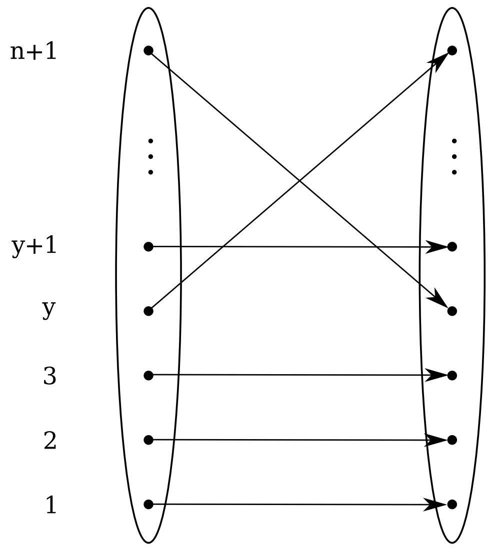
$$\exists y \in [\![1, n+1]\!],\ \forall x \in A,\ f(x) \neq y$$

Ce qui en langage naturel se dit : « il existe un y dans $[\![1, n+1]\!]$ qui n'est l'image d'aucune élément par f ».

6. Soit $g : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ la fonction qui permute $n+1$ et y :

$$g : x \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x = n+1 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Figure 1 – g permute y et $n+1$



(a) **Question bonus.** Montrer que g est injective. (Faire un dessin pour représenter ce que fait g peut être utile.)

Solution: Soient $x, x' \in [\![1, n+1]\!]$. Supposons $g(x) = g(x')$ et montrons que $x = x'$. On distingue trois cas :

— si $x = y$: alors $g(x) = n+1 = g(x')$. Puisque $g(x') = n+1$, nécessairement $x' = y$ (on peut prouver ce point facilement par l'absurde). Ainsi $x = x'$.

— si $x = n+1$: (ce cas est symétrique au précédent.) Alors $g(x) = y = g(x')$. Puisque $g(x') = y$, nécessairement $x' = n+1$ (par l'absurde). Ansi $x = x'$.

— si $x \neq y$ et $x \neq n+1$: alors par définition de g, $g(x) = x = g(x')$. Puisque $g(x') = x$, nécessairement $x' \neq y$ et $x' \neq n+1$ (par l'absurde). Donc $g(x') = x'$, d'où $x = x'$.

Ces trois cas couvrent toutes les valeurs possibles de x. On a donc bien montré l'injectivité de g.

(b) Montrer que pour tout $x \in A$, $(g \circ f)(x) \in [\![1, n]\!]$.

Solution: Soit $x \in A$. Par définition de y, $f(x) \neq y$. Comme g est injective, on en déduit que $g(f(x)) \neq g(y)$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \neq n+1$.

Par ailleurs $g \circ f$, par sa définition, est une fonction à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$, donc $(g \circ f)(x) \in [\![1, n+1]\!]$. On en conclut que pour tout $x \in A$, $(g \circ f)(x) \in [\![1, n]\!]$.

(c) En déduire une injection de A dans $[\![1, n]\!]$.

Solution: $g \circ f$ convient : comme f et g sont injectives, elle est injective.

(d) En déduire que $\mathrm{Card}\,(A) \leq n+1$.

Solution: D'après $P(n)$, s'il existe une injection de A dans $[\![1, n]\!]$, alors $\mathrm{Card}\,(A) \leq n$. Or on vient de montrer que $g \circ f$ est une telle injection. D'où : $\mathrm{Card}\,(A) \leq n$, et donc $\mathrm{Card}\,(A) \leq n+1$.

Ce qui précède suffit à montrer l'hérédité, et donc à clore notre preuve par récurrence.

7. **Question bonus.** Montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Card}\,(A) \leq n \Rightarrow \text{il existe une injection de } A \text{ dans } [\![1, n]\!].$$

Solution: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p = \mathrm{Card}\,(A)$, on suppose $p \leq n$. Alors par défition du cardinal, il existe une fonction injective de A dans $[\![1, p]\!]$, appelons-la h. On définit une nouvelle fonction :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & [\![1, n]\!] \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} \right.$$

i est bien à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ puisque $[\![1, p]\!] \subseteq [\![1, n]\!]$. De plus, elle est injective puisque h l'est (la démonstration est laissée en exercice).

Exercice 4 : cardinaux infinis (5 points)

On peut généraliser la notion de cardinal aux ensembles infinis comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Pour deux ensembles (fini ou infinis) E et F, on dit qu'on a, par définition :

$$\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F) \Leftrightarrow \text{il existe une bijection entre } E \text{ et } F.$$

On peut également comparer les cardinaux entre eux en utilisant la notion d'injection :

$$\mathrm{Card}\,(E) \leq \mathrm{Card}\,(F) \Leftrightarrow \text{il existe une injection de } E \text{ dans } F.$$

Ainsi, on généralise aux ensembles infinis le résultat qu'on a prouvé dans l'exercice précédent sur les ensembles finis. Toutefois, il s'agit maintenant d'une définition, et plus d'un théorème.

On va montrer qu'il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, et donc que $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont tous les deux infinis, mais $\mathbb{R}$ est en un sens « plus grand ». Nous allons pour cela procéder par l'absurde. On suppose donc à présent qu'il existe une telle injection, appelons-la f_3, et on va aboutir à une contradiction.

Si on prend les fonctions $f_1 : [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I} \to [0,10[$ de l'exercice 1 et $f_2 : [0,10[\to \mathbb{R}$ de l'exercice 2, on peut construire la fonction de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $\mathbb{N}$ $f_4 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Comme f_4 est composée d'injections, elle est injective.

$$[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I} \xrightarrow{f_1} [0,10[\xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \mathbb{N}$$

Que f_4 soit injective signifie qu'à chaque suite de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ on peut attribuer un numéro distinct. Pour simplifier, on va supposer * que ces numéros sont 0, 1, 2… on peut donc créer un tableau infini où à la ligne 0 on écrit la suite numéro 0, à la ligne 1 la suite numéro 1, etc. La colonne correspond à la position dans la suite (Figure 2). Intuitivement, cela revient à mettre dans un tableau les développements décimaux de tous les réels de $[0,10[$.

Considérons maintenant la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : si le n-ième élément de la suite numéro n est différent de 4, alors $d_n = 4$; sinon, $d_n = 3$. Par exemple avec la figure 2, cette règle donnerait :

$$d = 4\ 3\ 4\ 4\ 3\ldots$$

On voit que cela correspond à prendre la diagonale du tableau et à transformer les 4 en 3, et tous les autres chiffres en 4.

$*$. Pour justifier qu'on peut faire cette simplification, il faudrait montrer que si on peut attribuer un numéro distinct à chaque suite, alors on peut sans perte de généralité considérer que ces numéros sont 0, 1, 2, etc., mais on va l'admettre et s'épargner ce détour un peu rébarbatif.

$$\begin{array}{lllllll}
0 \to & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\
1 \to & 0 & \mathbf{4} & 0 & 3 & 2 & \dots \\
2 \to & 1 & 2 & \mathbf{5} & 7 & 3 & \dots \\
3 \to & 1 & 2 & 7 & \mathbf{3} & 0 & \dots \\
4 \to & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{4} & \dots \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

FIGURE 2 – Exemple de tableau listant les éléments de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$.

Solution: $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de chiffres entre 0 et 9, elle est donc dans $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$. De plus, comme tous ses chiffres sont égaux à 3 ou 4, elle n'est pas stationnaire à 9. Elle n'est donc pas dans $\mathcal{I}$. D'où : $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$.

2. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement différente de toutes les suites du tableau : la suite n° 0, n° 1, etc.

Solution: Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est différente de la suite numéro k. Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Appelons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numéro k. Par construction, on a $d_k \neq a_k$. Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diffèrent d'au moins un élément : elles sont donc différentes. On vient de montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0,9]\!] \setminus \mathcal{I},\ f_4((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = k \implies (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Puisque $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble de départ de f_4, elle doit donc avoir une image par f_4 (un numéro), et donc figurer à la ligne correspondante du tableau. Pourtant, elle ne peut être égale à aucune suite du tableau : contradiction.

On a donc bien montré par l'absurde qu'il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, ou dit autrement, que :

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$$

L'argument que nous avons utilisé est parfois appelé *argument diagonal*. Depuis son invention par Cantor en 1891, son principe a été réutilisé dans de nombreuses preuves célèbres des mathématiques : le paradoxe de Russell, le théorème d'incomplétude de Gödel, le problème de l'arrêt de Turing...

Le résultat $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$ est en fait un cas particulier du théorème de Cantor, qui stipule que pour tout ensemble E :

$$\mathrm{Card}\,(E) < \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}\,(E))$$

Étonnament, la démonstration de ce théorème tient en moins de cinq lignes ! Les intéressés pourront se référer à la page Wikipédia du théorème.