DM 1 : logique, théorie des ensembles et fonctions

À rendre en groupe de 2 à 4.

Rendez les exercices dans l'ordre ou chacun sur une feuille séparée (pas tous ensemble en vrac). Ne perdez pas de temps sur les questions bonus : ce sont des questions intéressantes, mais parfois plus difficiles.

L'exercice 3 est plutôt difficile, je vous conseille de faire les autres en priorité.

Le barème est indicatif. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir une bonne note. Comme le DM est assez long, la notation sera probablement non linéaire.

Exercice 1 : développement décimal des réels (5 points)

On admet sans démonstration les résultats suivants :

— Tout réel peut s'écrire comme une suite de chiffres entre 0 et 9, éventuellement infinie. Chaque position dans le développement décimal correspond à une puissance de dix. Il s'agit de l'écriture décimale dont nous avons l'habitude. Par exemple :

$$\begin{aligned} 42 &= 4 \cdot 10 + 2 \\ 10{,}75 &= 1 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \\ \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots &= 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

— Réciproquement, toute suite de chiffres entre 0 et 9, éventuellement infinie, correspond à un réel lorsque les positions des chiffres sont associées à des puissances de dix contigües. Par exemple : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, si on choisit d'associer à a_0 le chiffre des unités, on obtient le développement décimal :

$$0{,}121212\ldots$$

qui correspond au réel $\frac{33}{4}$.

1. Soit x le réel correspondant au développement décimal :

$$x = 0{,}9999\ldots$$

Montrer que x vérifie l'équation $10x = 9 + x$. En déduire que $x = 1$.

On voit que deux développement décimaux différents peuvent correspondre au même réel. Lorsqu'un développement décimal se termine par une suite infinie de 9, on dit qu'il s'agit d'un développement impropre.

On admet sans démonstration le résultat suivant : si deux développements décimaux différents représentent le même réel, alors l'un des deux est impropre.

On va maintenant s'intéresser aux réels de l'intervalle $[0, 10]$. Leur particularité est que leurs développement décimaux peuvent être vus comme une suite d'éléments de $[\![0, 9]\!]$: pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$, on peut parler du réel :

$$x = c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \ldots$$

on a alors $x \in [0, 10]$.

Les développements impropres correspondent aux suites qui sont *stationnaires à 9*, c'est-à-dire dont tous les éléments sont égaux à 9 à partir d'un certain rang.

2. Écrire en utilisant des symboles logiques la proposition suivante : « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à 9 ».
3. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des suites stationnaires à 9. En se basant sur ce qui précède, expliciter une fonction f_1 de $[\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $[0, 10[$ qui soit bijective, et justifier sa bijectivité.

Exercice 2 : des fonctions bijectives (8 points)

1. Soit f la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0, 10[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{5} - 1\right)\right] \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que f est surjective.

(b) Montrer que f est injective. (On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que f est strictement croissante.)

2. Soit g la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,1] & \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \begin{cases} 1/(n+1) & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = 1/n \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que g est injective. (Indice : poser x, y tels que $g(x) = g(y)$ et montrer que $x = y$ en distinguant plusieurs cas.)

   (b) Montrer que g est surjective.

3. Soit la fonction :

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1[& \to &]0,1] \\ x & \mapsto & 1-x \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que h est bijective.

   (b) En déduire que $g \circ h$ est une fonction bijective de $[0,1[$ dans $]0,1[$.

4. **Question bonus.** À partir de $g \circ h$, construire une fonction j, bijective, de $[0,10[$ dans $]0,10[$.

5. À partir des fonctions f et j, construire une bijection f_2 de $[0,10[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : cardinaux finis (10 points)

Il existe plusieurs définitions équivalentes du cardinal d'un ensemble fini. Dans la suite, on prendra la définition suivante. Pour tout ensemble fini A et tout entier naturel n :

$$\mathrm{Card}\,(A) = n \Leftrightarrow \text{il existe une bijection de } A \text{ dans } [\![1,n]\!]$$

1. En utilisant cette définition du cardinal, montrer que $\mathrm{Card}\,(\{4,5,6\}) = 3$.

On veut maintenant montrer par récurrence le prédicat suivant :

$$P(n) \overset{\text{def}}{\equiv} \text{il existe une injection de } A \text{ dans } [\![1,n]\!] \Rightarrow \mathrm{Card}\,(A) \leq n$$

pour tout n entier naturel non nul.

2. Montrer que si $\text{Card}(A) > 1$, alors A contient au moins deux éléments distincts. Attention, vous n'avez le droit d'utiliser que la définition du cardinal donnée ci-dessus. D'autres arguments, qui se baseraient sur notre compréhension intuitive de ce qu'est le cardinal, seront accueillis avec beaucoup moins d'enthousiasme. Indice : rappelez-vous que toute bijection possède une bijection réciproque.
3. S'en servir pour démontrer $P(1)$ par contraposition.

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vérifié. On suppose qu'il existe $f : A \to [\![1, n+1]\!]$ injective. Deux cas sont possibles : soit f est aussi surjective, soit elle ne l'est pas.

4. Montrer que si f est surjective, alors $\text{Card}(A) = n+1$. On a donc bien $P(n+1)$ vrai dans ce cas.

> On va maintenant s'intéresser au cas où f n'est pas surjective. Rappel : la proposition « f est surjective » s'écrit symboliquement :
>
> $$\forall y \in [\![1, n+1]\!],\ \exists x \in A,\ f(x) = y$$

5. En utilisant les propriétés des quantificateurs, écrire et transformer la négation de la proposition ci-dessus afin de justifier qu'il existe un $y \in [\![1, n+1]\!]$ qui n'est l'image d'aucun élément de A par f.
6. Soit $g : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ la fonction qui permute $n+1$ et y :

$$g : x \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x = n+1 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) **Question bonus.** Montrer que g est injective. (Faire un dessin pour représenter ce que fait g peut être utile.)
   (b) Montrer que pour tout $x \in A$, $(g \circ f)(x) \in [\![1, n]\!]$.
   (c) En déduire une injection de A dans $[\![1, n]\!]$.
   (d) En déduire que $\text{Card}(A) \leq n + 1$.

Ce qui précède suffit à montrer l'hérédité, et donc à clore notre preuve par récurrence.

7. **Question bonus.** Montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Card}(A) \leq n \Rightarrow \text{il existe une injection de } A \text{ dans } [\![1, n]\!].$$

Exercice 4 : cardinaux infinis (5 points)

On peut généraliser la notion de cardinal aux ensembles infinis comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Pour deux ensembles (fini ou infinis) E et F, on dit qu'on a, par définition :

$$\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F) \Leftrightarrow \text{il existe une bijection entre } E \text{ et } F.$$

On peut également comparer les cardinaux entre eux en utilisant la notion d'injection :

$$\operatorname{Card}(E) \leq \operatorname{Card}(F) \Leftrightarrow \text{il existe une injection de } E \text{ dans } F.$$

Ainsi, on généralise aux ensembles infinis le résultat qu'on a prouvé dans l'exercice précédent sur les ensembles finis. Toutefois, il s'agit maintenant d'une définition, et plus d'un théorème.

On va montrer qu'il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, et donc que $\operatorname{Card}(\mathbb{N}) < \operatorname{Card}(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont tous les deux infinis, mais $\mathbb{R}$ est en un sens « plus grand ». Nous allons pour cela procéder par l'absurde. On suppose donc à présent qu'il existe une telle injection, appelons-la f_3, et on va aboutir à une contradiction.

Si on prend les fonctions $f_1 : [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I} \to [0, 10[$ de l'exercice 1 et $f_2 : [0, 10[\to \mathbb{R}$ de l'exercice 2, on peut construire la fonction de $[\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $\mathbb{N}$ $f_4 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Comme f_4 est composée d'injections, elle est injective.

$$[\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I} \xrightarrow{f_1} [0, 10[\xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \mathbb{N}$$

Que f_4 soit injective signifie qu'à chaque suite de $[\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ on peut attribuer un numéro distinct. Pour simplifier, on va supposer * que ces numéros sont 0, 1, 2… on peut donc créer un tableau infini où à la ligne 0 on écrit la suite numéro 0, à la ligne 1 la suite numéro 1, etc. La colonne correspond à la position dans la suite (Figure 1).

∗. Pour justifier qu'on peut faire cette simplification, il faudrait montrer que si on peut attribuer un numéro distinct à chaque suite, alors on peut sans perte de généralité considérer que ces numéros sont 0, 1, 2, etc., mais on va l'admettre et s'épargner ce détour un peu rébarbatif.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 2 & \dots \\
1 & \to & 0 & \mathbf{4} & 0 & 3 & 2 & \dots \\
2 & \to & 1 & 2 & \mathbf{5} & 7 & 3 & \dots \\
3 & \to & 1 & 2 & 7 & \mathbf{3} & 0 & \dots \\
4 & \to & 2 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{4} & \dots \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

FIGURE 1 – Exemple de tableau listant les éléments de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$ dans $\mathbb{N}$.

Intuitivement, cela revient à mettre dans un tableau les développements décimaux de tous les réels de $[0,10[$.

Considérons maintenant la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : si le n-ième élément de la suite numéro n est différent de 4, alors $d_n = 4$; sinon, $d_n = 3$. Par exemple avec la figure 1, cette règle donnerait :

$$d = 4\ 3\ 4\ 4\ 3 \dots$$

On voit que cela correspond à prendre la diagonale du tableau et à transformer les 4 en 3, et tous les autres chiffres en 4.

1. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{I}$.
2. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement différente de toutes les suites du tableau : la suite n° 0, n° 1, etc.

Puisque $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble de départ de f_4, elle doit donc avoir une image par f_4 (un numéro), et donc figurer à la ligne correspondante du tableau. Pourtant, elle ne peut être égale à aucune suite du tableau : contradiction.

On a donc bien montré par l'absurde qu'il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, ou dit autrement, que :

$$\mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$$

L'argument que nous avons utilisé est parfois appelé *argument diagonal*. Depuis son invention par Cantor en 1891, son principe a été réutilisé dans de nombreuses preuves célèbres des mathématiques : le paradoxe de Russell, le théorème d'incomplétude de Gödel, le problème de l'arrêt de Turing...

Le résultat $\mathrm{Card}\,(\mathbb{N}) < \mathrm{Card}\,(\mathbb{R})$ est en fait un cas particulier du théorème de Cantor, qui stipule que pour tout ensemble E :

$$\mathrm{Card}\,(E) < \mathrm{Card}\,(\mathcal{P}\,(E))$$

Étonnament, la démonstration de ce théorème tient en moins de cinq lignes ! Les intéressés pourront se référer à la page Wikipédia du théorème.